前　言

随机过程是现代概率论的一个重要内容，是研究客观世界中随机演变过程的理论工具，已在工程科学技术和社会科学方面得到了广泛的应用并显示出十分重要的作用. 只有熟练掌握随机过程的基本理论和方法，才能帮助我们进一步学习现代科学技术，为探索科学技术新领域奠定必要的数学基础.

现在，不仅理工科和经济管理类的研究生开设了随机过程课程，而且越来越多的本科专业也开设了随机过程课程. 但是，读者在学习中普遍感到本门课程概念比较抽象，问题难以入手，思维难以展开，学习起来有一定的困难. 为了帮助大家克服困难，尽量掌握本门课程的精髓和方法，我们编写了本书.

本书着重讨论了随机过程的基本理论和分析、解题方法. 全书分为九章，依次为随机过程的基本概念、泊松随机过程、马尔可夫链、连续时间的马尔可夫链、随机分析与随机微分方程、平稳过程、平稳过程的谱分析、正态随机过程和时间序列分析简介. 在编写中力求以简明、易懂的语言深入浅出地为读者诠释概念、解析疑难，强调了基本方法的叙述与实际例子的演示，努力培养读者分析问题、解决问题的能力. 我们遵照与教材同步的原则，读者可以按照学习进度阅读本书，学好随机过程课程.

由于目前随机过程课程没有一本统一的教材，各种教材内容差异较大，许多定理、公式的叙述和写法不很一致，所以我们在编写时尽量采用多数教材的提法，在内容上较全面地包容了随机过程的基本理论和基本公式. 在例题上选用了比较实际的、能加深对基本概念的理解的、有助于提高分析问题和解决问题能力的习题.

希望能得到读者的认同与欢迎，并对读者的学习有一定的帮助.

本书在编写过程中参阅了一些作者的有关著作，在此向他们致以谢意. 本书得以出版，还要感谢华中科技大学出版社领导和编辑的大力支持. 编辑和出版人员为本书做了许多精细的工作，使本书能较好地奉献给读者，是应该得到作者和读者的感谢的.

由于水平和学识所限，书中错误在所难免，欢迎读者批评指正.

孙清华　孙　昊

2003年9月

目　　录

第一章　随机过程的基本概念

第一节　随机过程的概念

主要内容

1. 设给定**概率空间**(Ω,F,P)和**参数集** $T\subset(-\infty,\infty)$，若对于每个 $e\in\Omega$ 和 $t\in T$ 都有一个定义在概率空间上的**随机变量** $X(e,t)$与之对应，则称依赖于参数 t 的随机变量$\{X(e,t),t\in T\}$为**随机过程**，简记为$\{X(t),t\in T\}$或 X_T 或 $X(t)$. 参数集 T 通常为下列情形之一：$(-\infty,\infty)$，$(0,\infty)$，$(\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots)$，$\{0,1,2,\cdots\}$，$[a,b]$，$(a,b)$等.

2. 通常将参数集 T 称为**参数空间**，$X(t)$所能取的一切值的集合 I 称为**状态空间（或值域）**. I 中的每一个元素称为**状态**.

3. 随机过程依其在任一时刻的状态是连续型随机变量还是离散型随机变量分为**连续型随机过程**和**离散型随机过程**. 它们的时间参数都是**连续的**.

状态连续、时间参数离散的随机过程称为**连续随机序列**，状态离散、时间参数离散的随机过程称为**离散随机序列**.

4. 给定随机过程$\{X(t),t\in T\}$，对任一固定的 $t_1\in T$，分布函数 $F_1(x_1,t_1)=P\{X(t_1)\leqslant x_1\}$，$x_1\in\mathbf{R}$ 称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**一维分布函数**. 使

$$F_1(x_1,t_1)=\int_{-\infty}^{x}f(x_1,t_1)\mathrm{d}x,\quad -\infty<x<\infty$$

的非负二元函数称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**一维概率密度函数**,简称**一维概率密度**.

类似地,当时间t取n个数值$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$时,n维随机变量$\{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)\}$的分布函数为

$$\begin{aligned}&F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n\},\\&\qquad\qquad -\infty<x_1,x_2,\cdots,x_n<\infty\end{aligned}$$

称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的n**维分布函数**.使

$$\begin{aligned}&F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

成立的非负函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的$n$**维概率密度**.

随机过程$\{X(t),t\in T\}$的一维分布,二维分布,$\cdots$,n维分布的全体称为随机过程$\{X(t);t\in T\}$的**有限维分布函数族**.

5. 随机过程的有限维分布函数有下列性质:

(1) 对称性　对$(1,2,\cdots,n)$的任一排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$有

$$\begin{aligned}&F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&=F_n(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n};t_{j_1},t_{j_2},\cdots,t_{j_n}).\end{aligned}$$

(2) 相容性　对任意$m<n$,有

$$\begin{aligned}&F_n(x_1,x_2,\cdots,x_m;\infty,\cdots,\infty;t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n)\\&=F_m(x_1,x_2,\cdots,x_m;t_1,t_2,\cdots,t_m).\end{aligned}$$

6. **特征函数**　设有

$$\begin{aligned}&\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&=E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}[u_1X(t_1)+u_2X(t_2)+\cdots+u_nX(t_n)]}]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n)}\mathrm{d}F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),\end{aligned}$$

称$\{\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n);t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geqslant1\}$为随机过程的**有限维特征函数族**.其性质有:

(1) 对称性　对$(1,2,\cdots,n)$的任一排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$有

$$\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=\varphi(u_{j_1},u_{j_2},\cdots,u_{j_n};t_{j_1},t_{j_2},\cdots,t_{j_n}).$$

(2) 相容性　对任意$m<n$,有

$$\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_m,0,\cdots,0;t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n)$$
$$=\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_m;t_1,t_2,\cdots,t_m).$$

有限维分布函数族与有限维特征函数族互相唯一决定.

7. **存在定理**(柯尔莫哥洛夫定理)　若分布函数族

$$\{F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n);t_1,t_2,\cdots,t_n\in T;n\geqslant 1\}$$

满足对称性和相容性,则必存在一个随机过程$\{X(t),t\in T\}$,使该分布函数族恰为该随机过程的有限维分布函数族.

8. 设$\{X(t),Y(t),t\in T\}$是二维随机过程,则称

$$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n);Y(t_1'),Y(t_2'),\cdots,Y(t_m'))$$

的联合分布函数

$$F_{n,m}(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n;y_1,y_2,\cdots,y_m;t_1',t_2',\cdots,t_m')$$
$$=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n;$$
$$Y(t_1')\leqslant y_1,Y(t_2)\leqslant y_2,\cdots,Y(t_n')\leqslant y_m\}$$

为二维随机过程的$n+m$维联合分布函数. 相应的$n+m$维概率密度函数为

$$f_{n,m}(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n;y_1,y_2,\cdots,y_m;t_1',t_2',\cdots,t_m')$$
$$=\frac{\partial^{n+m}F_{n,m}(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n;y_1,y_2,\cdots,y_m;t_1',t_2',\cdots,t_m')}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n\partial y_1\partial y_2\cdots\partial y_m}.$$

疑难解析

1. 怎样理解随机过程? 它与函数及随机变量有何不同?

答　(1) 随机过程将普通函数的概念从实数与实数的对应关系推广到实数与随机变量的对应关系. 对普通函数而言,当$t\in T$时,总有一个确定的实数x与之对应;而对随机过程而言,当$t\in T$

时，与之对应的 $X(e,t)$是一个随机变量.

(2) 随机过程是随机变量概念的推广. 随机变量是在固定时间 t 上的试验结果，是一个数的集合；而随机过程是在 $t\in T$ 上的试验结果，是一个时间函数的集合. 当 t 固定时，随机过程就成为一个随机变量.

(3) 随机变量 $X(e)$是定义在 Ω 上的函数，对每个 $e\in\Omega$，都有确定的 x 与之对应；而随机过程当 $e\in\Omega$ 时，对应的 $X(e,t)$又是 t 的函数，称为样本函数或样本曲线(或轨道，或现实). 所以，随机过程将随机变量概念从 e 与实数对应推广到 e 与实函数的对应.

(4) 随机过程是一族随机变量，T 中有多少元素，$X(e,t)$就含多少个随机变量. 随机过程又是一族样本函数，每一 $e\in\Omega$ 对应一个样本函数，Ω 含多少个基本事件，随机过程就有多少个样本函数.

2. 随机过程对参数集 T 有何要求?

答 随机过程定义中的参数集 T 可以是时间集也可以是长度、重量、速度等物理量. 随机过程本来通称随机函数，当参数集 T 是时间集时称为随机过程，但现在将参数不是时间集的随机函数也称为随机过程，对参数集 T 不再有时间集的限制.

方法、技巧与典型例题分析

本节主要是理解概念、辨析定义，通过例题区别随机变量与随机过程，学会构造随机过程.

例 1 利用重复抛掷硬币的试验定义一个随机过程

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & \text{出现正面},\\ 2t, & \text{出现反面},\end{cases}\quad -\infty<t<\infty.$$

出现正面与反面的概率相等. 求：$X(t)$的一维分布函数 $F(x,1/2)$ 和 $F(x,1)$，$X(t)$的二维分布函数 $F(x_1,x_2;1/2,1)$.

解 以随机变量 Y 记抛掷硬币的试验结果，则

$$Y = \begin{cases} -1, & \text{出现反面}, \\ 1, & \text{出现正面}. \end{cases}$$

且
$$P\{Y=1\} = P\{Y=-1\} = 1/2.$$

(1) 当 $t=1/2$ 时,若 $Y=1$,则 $X(1/2)=\cos(\pi/2)=0$;若 $Y=-1$,则 $X(1/2)=2\cdot(1/2)=1$. 于是

$$\begin{aligned} F_X(x,1/2) &= P\{X(1/2)\leqslant x\} \\ &= P\{X(1/2)\leqslant x \mid Y=1\}P\{Y=1\} \\ &\quad + P\{X(1/2)\leqslant x \mid Y=-1\}P\{Y=-1\} \\ &= \begin{cases} 0, & x<0, \\ 1/2, & 0\leqslant x<1, \\ 1, & 1\leqslant x. \end{cases} \end{aligned}$$

类似可得
$$\begin{aligned} F_X(x,1) &= P\{X(1)\leqslant x\} \\ &= \begin{cases} 0, & x<-1, \\ 1/2, & -1\leqslant x<2, \\ 1, & 2\leqslant x. \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 当 $t=1$ 时,若 $Y=1$,则 $X(1/2)=\cos\pi=-1$;若 $Y=-1$,则 $X(1/2)=2\cdot 1=2$. 于是

$$\begin{aligned} F_X(x_1,x_2;\ 1/2,1) &= P\{X(1/2)<x_1, X(1)\leqslant x_2\} \\ &= \begin{cases} 0, & x_1<0, -\infty<x_2<\infty, \\ 0, & x_1\geqslant 0, x_2<-1, \\ 1/2, & 0\leqslant x_1<1, 2\leqslant x_2, \\ 1/2, & x_1>1, -1\leqslant x_2<2, \\ 1, & x_1>1, x_2\geqslant 2. \end{cases} \end{aligned}$$

例 2 设有随机过程 $X(t)=A+Bt, t\geqslant 0$,其中 A 与 B 是相互独立的随机变量,均服从标准正态分布. 求 $X(t)$ 的一维和二维分布.

解 因为,$\forall$ 固定的 $t\in T$,$X(t)$ 是正态随机变量,故

$$E[X(t)] = E(A)+E(B)t = 0,$$
$$D[X(t)] = D(A)+D(B)t^2 = 1+t^2.$$

所以，$X(t)$服从正态分布 $N(0,1+t^2)$，从而也是随机过程 $X(t)$的一维分布.

其次，$\forall$ 固定的 $t_1,t_2\in T$，$X(t_1)=A+Bt_1$，$X(t_2)=A+Bt_2$，则依 n 维正态随机向量的性质，$(X(t_1),X(t_2))$服从二维正态分布，且

$$E[X(t_1)]=0,\quad E[X(t_2)]=0,$$
$$D[X(t_1)]=1+t_1^2,\quad D[X(t_2)]=1+t_2^2,$$
$$\mathrm{Cov}(X(t_1),X(t_2))=E[X(t_1)X(t_2)]=1+t_1t_2.$$

所以，二维分布是数学期望向量为$(0,0)$，协方差矩阵为 $\begin{bmatrix}1+t_1^2 & 1+t_1t_2\\ 1+t_1t_2 & 1+t_2^2\end{bmatrix}$的二维正态分布.

例 3 设随机过程 $X(t)=X\cos\omega t\ (-\infty<t<\infty)$，其中 ω 为常数，X 是服从正态分布的随机变量，$E(X)=0$，$D(X)=1$. 求 $X(t)$的一维分布密度函数和协方差函数.

解
$$E[X(t)]=E(X)\cos\omega t=0,$$
$$D[X(t)]=D(X)(\cos\omega t)^2=(\cos\omega t)^2,$$

故$\{X(t),t\in T\}$的一维分布函数为 $N(0,(\cos\omega t)^2)$.

协方差函数(见第二节)是随机过程$\{X(t),t\in T\}$在任意两个时刻 t_1 和 t_2 时状态 $X(t_1)$和 $X(t_2)$的二阶中心混合矩

$$C_X(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][X(t_2)-\mu_X(t_2)]\},$$

其中
$$\mu_X(t)=E[X(t)]=0,$$

故
$$C_X(t_1,t_2)=E[(X\cos\omega t_1)(X\cos\omega t_2)]$$
$$=E(X^2)\cos\omega t_1\cos\omega t_2=\cos\omega t_1\cos\omega t_2,$$

其中
$$E(X^2)=D(X)-[E(X)]^2=1-0=1.$$

例 4 设随机过程只有两条样本曲线

$$X(t,\omega_1)=a\cos t,\quad -\infty<t<\infty,$$
$$X(t,\omega_2)=a\cos(t+\pi)=-a\cos t,\quad -\infty<t<\infty,$$

其中常数 $a>0$，$P(\omega_1)=2/3$，$P(\omega_2)=1/3$. 求 $X(t)$的一维分布函

数 $F(x,0)$，$F(x,\pi/4)$ 及二维分布函数 $F(x_1,x_2;0,\pi/4)$.

解 如图1.1所示，取 ω_0 为1. $X(0)$ 的可取值为

$$X(0,\omega_1)=a\cos 0=a,\ X(0,\omega_2)=-a\cos 0=-a.$$

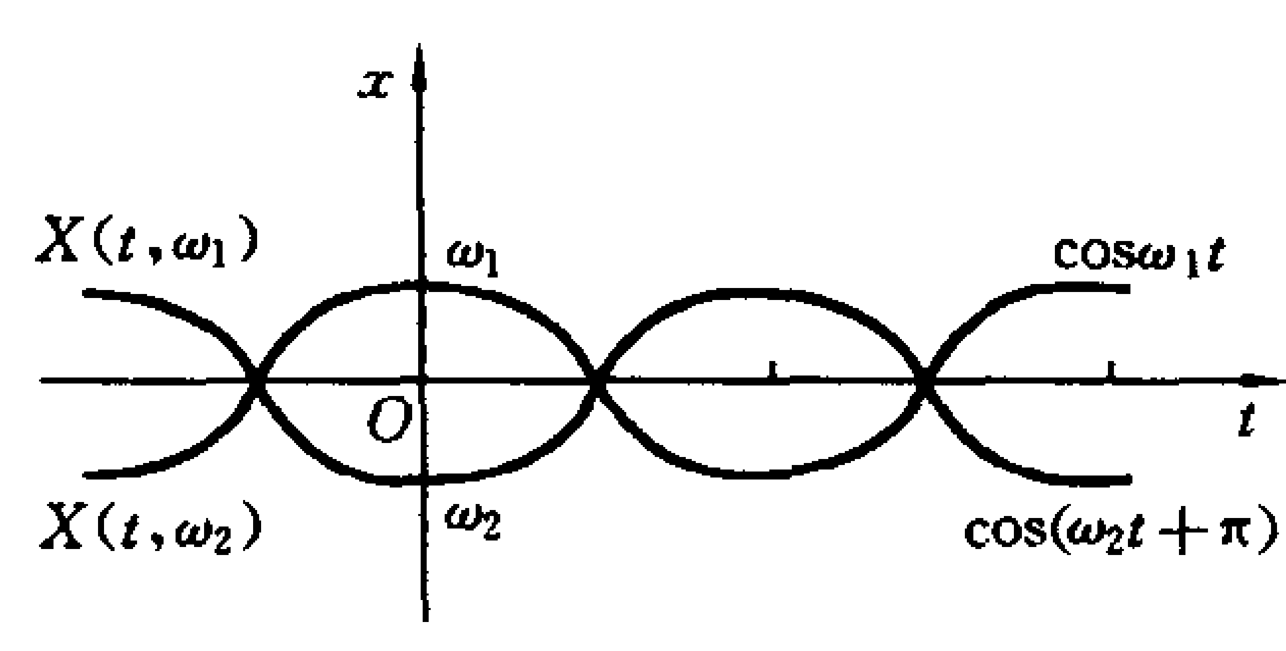


图1.1

而
$$P\{X(0)=a\}=P(\omega_1)=2/3,$$
$$P\{X(0)=-a\}=P(\omega_2)=1/3.$$

故
$$F(x,0)=\begin{cases}0, & x<-a,\\ 1/3, & -a\leqslant x<a,\\ 1, & x\geqslant a.\end{cases}$$

类似地，$X(\pi/4)$ 的可取值为

$$X(\pi/4,\omega_1)=a\cos(\pi/4)=\sqrt{2}a/2,$$
$$X(\pi/4,\omega_2)=-a\cos(\pi/4)=-\sqrt{2}a/2.$$

故
$$F(x,\pi/4)=\begin{cases}0, & x<-\sqrt{2}a/2,\\ 1/3, & -\sqrt{2}a/2\leqslant x<\sqrt{2}a/2,\\ 1, & x\geqslant\sqrt{2}a/2.\end{cases}$$

对于二维分布，随机向量 $(X(0),X(\pi/2))$ 可取值为

$$(X(0,\omega_1),X(\pi/4,\omega_1))=(a,\sqrt{2}a/2),$$
$$(X(0,\omega_2),X(\pi/4,\omega_2))=(-a,-\sqrt{2}a/2).$$

而
$$P\{X(0)=a,X(\pi/4)=\sqrt{2}a/2\}=P(\omega_1)=2/3,$$
$$P\{X(0)=-a,X(\pi/4)=-\sqrt{2}a/2\}=P(\omega_2)=1/3,$$

故
$$F(x_1,x_2;0,\pi/4)$$

$$=\begin{cases}0, & x_1<-a \text{ 或 } x_2<-\sqrt{2}a/2,\\ 1/3, & x_1\geqslant -a\cup -\sqrt{2}a/2\leqslant x_2<\sqrt{2}a/2,\\ & -a\leqslant x_1<a\cup x_2\geqslant\sqrt{2}a/2,\\ 1, & x_1\geqslant a \text{ 或 } x_2\geqslant\sqrt{2}a/2.\end{cases}$$

例 5 设随机过程 $X(t)=A\cos t, t\in\mathbf{R}$. A 是随机变量,概率分布列为

A	1	2	3
p	1/3	1/3	1/3

求:(1) 一维分布函数 $F(x,\pi/4)$,$F(x,\pi/2)$;

(2) 二维分布函数 $F(x_1,x_2;0,\pi/3)$.

解 (1) 因为 $X(\pi/4)=A\cos(\pi/4)=\sqrt{2}A/2$,可取值为 $\sqrt{2}/2$,$\sqrt{2}$,$3\sqrt{2}/2$(将 A 代入即得),而

$$P\{X(\pi/4)=\sqrt{2}/2\}=P\{A=1\}=1/3,$$

$$P\{X(\pi/4)=\sqrt{2}\}=P\{A=2\}=1/3,$$

$$P\{X(\pi/4)=3\sqrt{2}/2\}=P\{A=3\}=1/3.$$

故

$$F(x,\pi/4)=\begin{cases}0, & x<\sqrt{2}/2,\\ 1/3, & \sqrt{2}/2\leqslant x<\sqrt{2},\\ 2/3, & \sqrt{2}\leqslant x<3\sqrt{2}/2,\\ 1, & x\geqslant 3\sqrt{2}/2.\end{cases}$$

因 $X(\pi/2)=A\cos(\pi/2)=0$. 只能取 0 值,故

$$F(x,\pi/2)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

(2) 因为,由

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2;0,\pi/3)&=P\{A\cos 0\leqslant x_1, A\cos(\pi/3)\leqslant x_2\}\\ &=P\{A\leqslant x_1, A/2\leqslant x_2\}\end{aligned}$$

$$= P\{A \leqslant x_1, A \leqslant 2x_2\}$$

$$= \begin{cases} P\{A \leqslant x_1\}, & x_1 \leqslant 2x_2, \\ P\{A \leqslant 2x_2\}, & 2x_2 < x_1. \end{cases}$$

所以

$$F(x_1, x_2; 0, \pi/3)$$

$$= \begin{cases} 0, & x_1 \leqslant 2x_2, x_1 < 1 \text{ 或 } 2x_2 < x_1, x_2 < 1/2, \\ 1/3, & x_1 \leqslant 2x_2, 1 \leqslant x_1 < 2 \text{ 或 } 2x_2 < x_1, 1/2 \leqslant x_2 < 1, \\ 2/3, & x_1 \leqslant 2x_2, 2 \leqslant x_1 < 3 \text{ 或 } 2x_2 < x_1, 1 \leqslant x_2 < 3/2, \\ 1, & x_1 \leqslant 2x_2, x_1 \geqslant 3 \text{ 或 } 2x_2 < x_1, x_2 \geqslant 3/2. \end{cases}$$

第二节　随机过程的数字特征

主 要 内 容

随机过程的数字特征是利用随机变量与随机向量的数字特征进行定义的.

1. 随机过程$\{X(t), t \in T\}$在每一时刻$t \in T$的状态是一个随机变量,它的数学期望与方差都是t的函数,分别称为随机变量的**数学期望**(函数)与**方差**(函数).

随机过程的数学期望(均值函数)

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \mathrm{d}F(x,t), \quad t \in T$$

为连续型时, $\mu_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,t) \mathrm{d}x, \quad t \in T.$

$\mu_X(t)$表示$X(t)$的所有样本函数在时刻t的理论平均值.

随机过程的方差函数

$$D_X(t) = D[X(t)] = E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\}, \quad t \in T,$$

而$\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)}$称为随机过程的**标准差**. 它们描绘随机过程

$X(t)$在时刻 t 对$\mu_X(t)$的偏离程度.

而 $\psi_X(t)=E[X^2(t)]$称为随机过程 $X(t)$的**均方值函数**. 显然 $D_X(t)=E[X^2(t)]-[E(X(t))]^2$.

2. 对任意两个固定时刻 t_1,t_2, $X(t_1)$与 $X(t_2)$是两个随机变量,其线性关系的密切程度用相关系数 $\rho(t_1,t_2)$表示,即

$$\rho(t_1,t_2)=\frac{\mathrm{Cov}(X(t_1),X(t_2))}{\sqrt{D[X(t_1)]}\sqrt{D[X(t_2)]}}.$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

称为随机过程 $X(t)$的**自相关函数**,简称**相关函数**. $C_X(t_1,t_2)=\mathrm{Cov}[X(t_1),X(t_2)]=E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][X(t_2)-\mu_X(t_2)]\}$ 称为随机过程 $X(t)$的**自协方差函数**,简称**协方差函数**. 有

$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2).$$

3. 给定二维随机过程$\{X(t),Y(t),t\in T\}$. 若

$$F\{x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n;y_1,y_2,\cdots,y_m;t_1',t_2',\cdots,t_m'\}$$
$$=F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)F_2(y_1,y_2,\cdots,y_m;t_1',t_2',\cdots,t_m'),$$

称随机过程 $X(t)$与 $Y(t)$**相互独立**.

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)],\ t_1,t_2\in T$$

称为随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$的**互相关函数**.

$$C_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][Y(t_2)-\mu_Y(t_2)]\},\ t_1,t_2\in T$$

称为随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$的**互协方差函数**.

$$C_{XY}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x-\mu_X(t_1)][y-\mu_Y(t_2)]f(x,y;t_1,t_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y;t_1,t_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

且有 $C_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)$.

若 $$C_{XY}(t_1,t_2)=0$$

或 $$R_{XY}(t_1,t_2)=\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2),\ t_1,t_2\in T,$$

则称随机过程 $X(t)$与 $Y(t)$**不相关**.

4. 若随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ $(t\in T)$ 相互独立，则 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 不相关. 反之，不一定成立.

疑 难 解 析

1. 为什么要引进随机过程的数字特征?

答 虽然随机过程的分布函数族能完善地刻画随机过程的统计特性，但在实际问题中往往由于资料不全而难以得到，而且，事实上也不总是需要了解随机过程的全部概率特性的. 因此，引进随机过程的数字特征可以使实际问题的处理变得简便，从而满足我们的需要.

2. 怎样确定两个随机过程的独立性?

答 随机过程的独立性是用分布函数来定义的. 如同确定两个随机变量的独立性一样，对连续概率分布情形，两个随机过程 $X(t)$, $Y(t)$ 相互独立的充要条件是：

(1) $\forall m\geqslant 1, n\geqslant 1$;

(2) 对于 $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}'$，有 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t};\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}')=f_X(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})f_Y(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}')$，其中 $f_X(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ 和 $f_Y(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}')$ 分别是 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的 n 维和 m 维分布密度.

3. 相关函数有什么性质?

答 (1) 对称性 $R_X(t_1,t_2)=R_X(t_2,t_1)$;

(2) $R_X(t_1,t_2)$ 是非负定的，即 $\forall n\geqslant 1$ 和 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n\in T$，及任意复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，有 $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_X(\tau_k,\tau_j)z_k\bar{z}_j\geqslant 0$. 事实上

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_X(\tau_k,\tau_j)z_k\bar{z}_j\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E[X(\tau_k)X(\tau_j)]z_k\bar{z}_j=E\Big[\sum_{k=1}^{n}X(\tau_k)z_k\,\overline{\sum_{j=1}^{n}X(\tau_j)z_j}\Big]\\&=E\Big[\Big|\sum_{k=1}^{n}X(\tau_k)z_k\Big|^2\Big]\geqslant 0.\end{aligned}$$

这两条性质对协方差函数同样成立.

方法、技巧与典型例题分析

在计算随机过程数字特征时，除了利用定义外，还应该把握好随机过程与随机变量的关系，利用随机变量的数字特征的计算方法与技巧.

例 1 已知随机过程$\{X(t),t\in T\}$的均值函数$\mu_X(t)$和协方差函数$C_X(t_1,t_2)$，$\varphi(t)$是普通的函数，求随机过程$Y(t)=X(t)+\varphi(t)$的均值函数和协方差函数.

解 因为$\varphi(t)$是普通函数，有$E[\varphi(t)]=\varphi(t)$，故

$$\begin{aligned}\mu_Y(t)&=E[Y(t)]=E[X(t)+\varphi(t)]\\&=E[X(t)]+E[\varphi(t)]=\mu_X(t)+\varphi(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_Y(t_1,t_2)&=E\{[Y(t_1)-\mu_Y(t_1)][Y(t_2)-\mu_Y(t_2)]\}\\&=E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][Y(t_2)-\mu_Y(t_2)]\}=C_X(t_1,t_2).\end{aligned}$$

例 2 设有随机过程$X(t)$和任一实数x，定义随机过程

$$Y(t)=\begin{cases}1, & X(t)\leqslant x,\\0, & X(t)>x.\end{cases}$$

证明：$\mu_Y(t)$和$R_Y(t_1,t_2)$分别是$X(t)$的一维和二维分布函数.

证 设$X(t)$的一维和二维概率密度分别为$f_1(x,t)$和$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$，则

$$\begin{aligned}\mu_Y(t)&=E[Y(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)f(x,t)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{x}f_1(x,t)\mathrm{d}x=F_1(x,t),\end{aligned}$$

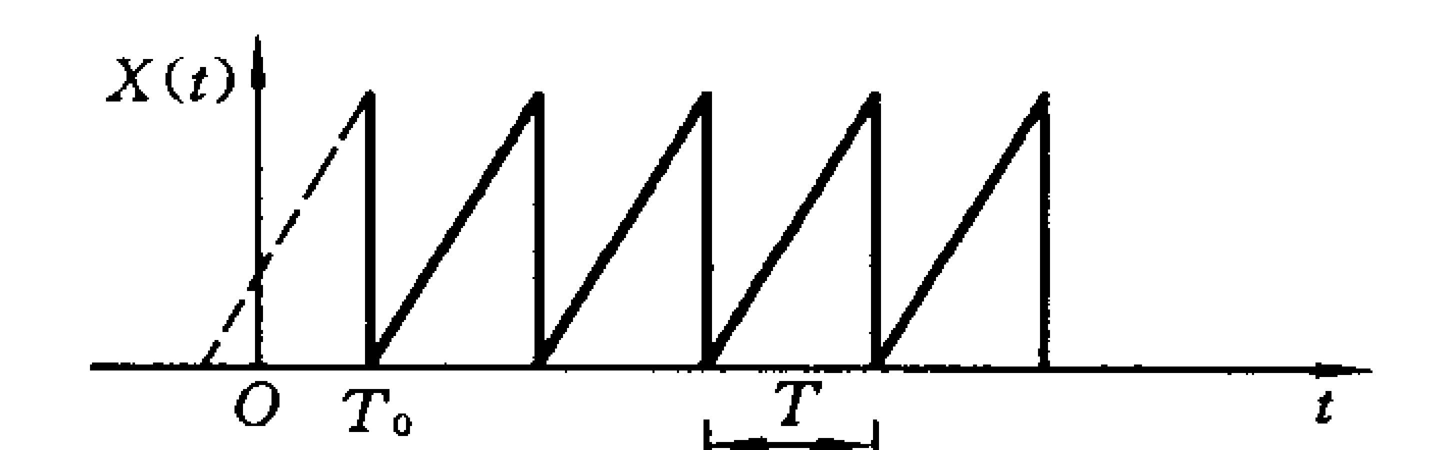
$$\begin{aligned}&R_Y(t_1,t_2)\\&=E[Y(t_1)Y(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y_1y_2f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\&=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=F_2(x_1,x_2;t_1,t_2).\end{aligned}$$

若考虑到对任意的 $t\in T$，$Y(t)$是离散型随机变量，则有

$$\mu_Y(t)=E[Y(t)]=1\cdot P\{Y(t)=1\}+0\cdot P\{Y(t)=0\}$$
$$=P\{X(t)\leqslant x\}=F_1(x,t),$$

$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]$$
$$=1\cdot 1\cdot P\{Y(t_1)=1,Y(t_2)=1\}$$
$$+1\cdot 0\cdot P\{Y(t_1)=1,Y(t_2)=0\}$$
$$+0\cdot 1\cdot P\{Y(t_1)=0,Y(t_2)=1\}$$
$$+0\cdot 0\cdot P\{Y(t_1)=0,Y(t_2)=0\}$$
$$=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2\}=F_2(x_1,x_2;t_1,t_2).$$

例 3 随机过程 $X(t)$ 的样本函数的图像是周期性锯齿波，其两个典型样本函数的图像如图 1.2 所示. 每个样本函数的形状相同，将 $t=0$ 以后的第一个零值时刻记为 T_0. 设 T_0 是一个均匀分布的随机变量，有



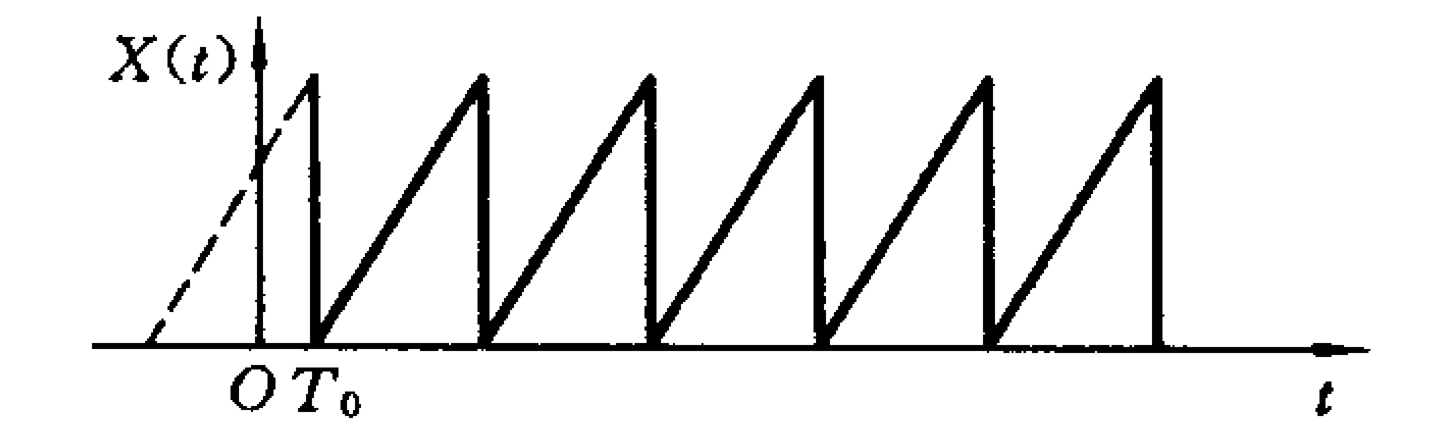


图 1.2

$$f_{T_0}(t)=\begin{cases}1/T, & 0\leqslant t\leqslant T,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $X(t)$的一维密度函数 $f_X(x)$.

解 由图示的三角形关系式得

$$X(t)=\frac{A}{T}(T-T_0+t),\quad -T+T_0\leqslant t\leqslant T_0,$$

其中
$$T_0=T-T/A\cdot X(t)+t=f(X).$$

于是
$$f_X(x)=f_{T_0}[f(x)]\left|\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}x}\right|=\begin{cases}1/A, & 0\leqslant x\leqslant A,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

例 4 设有随机过程$\{X(t),t\in T\}$和常数 a，试以 $X(t)$的相关函数表示随机过程 $Y(t)=X(t+a)-X(t)$，$t\in T$ 的相关函数.

解 依定义有

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) &= E\{[X(t_1+a)-X(t_1)][X(t_2+a)-X(t_2)]\} \\
&= E[X(t_1+a)X(t_2+a)]-E[X(t_1+a)X(t_2)] \\
&\quad -E[X(t_1)X(t_2+a)]+E[X(t_1)X(t_2)] \\
&= R_X(t_1+a,t_2+a)-R_X(t_1+a,t_2) \\
&\quad -R_X(t_1,t_2+a)+R_X(t_1,t_2).
\end{aligned}
$$

例 5 设 $Z(t)=X+Yt$，$-\infty<t<\infty$. 若已知二维随机变量 (X,Y) 的协方差矩阵为 $\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2\end{bmatrix}$，求 $Z(t)$ 的协方差函数.

解 依定义，利用数学期望的性质可得

$$
\begin{aligned}
& C_Z(t_1,t_2) \\
&= E\{[(X+Yt_1)-(\mu_X+\mu_Y t_1)][(X+Yt_2)-(\mu_X+\mu_Y t_2)]\} \\
&= E\{[(X-\mu_X)+(Yt_1-\mu_Y t_1)][(X-\mu_X)+(Yt_2-\mu_Y t_2)]\} \\
&= E[(X-\mu_X)(X-\mu_X)]+E[(X-\mu_X)t_2(Y-\mu_Y)] \\
&\quad +E[t_1(Y-\mu_Y)(X-\mu_X)]+E[t_1t_2(Y-\mu_Y)(Y-\mu_Y)] \\
&= C_{XX}+t_2C_{XY}+t_1C_{YX}+t_1t_2C_{YY}=\sigma_1^2+(t_1+t_2)\rho+t_1t_2\sigma_2^2.
\end{aligned}
$$

例 6 随机相位正弦波 $X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$，$-\infty<t<\infty$，其中 a,ω_0 是正常数. Φ 是在 $(-\pi,\pi)$ 内均匀分布的随机变量. 求 $X(t)$ 的概率密度函数、均值函数、方差函数和相关函数.

解 因为 Φ 的概率密度函数为

$$
f(\varphi)=\begin{cases}1/(2\pi), & -\pi<\varphi<\pi, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}
$$

所以:(1) 依特征函数定义，有

$$
\varphi_X(v)=E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}vX(t)}]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}vx}f_X(x)\mathrm{d}x, \qquad ①
$$

故

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(v) &= E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}va\cos(\omega t+\Phi)}]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}va\cos(\omega t+\Phi)}f(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}va\cos(\omega t+\Phi)}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\omega t}^{\pi+\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}va\cos y}\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

依积分性质，若 $\varphi_X(t)$ 是周期为 T 的周期函数，则

$$\int_{-T/2+a}^{T/2+a} \varphi_X(t)\mathrm{d}t = \int_{-T/2}^{T/2} \varphi_X(t)\mathrm{d}t.$$

故 $$\varphi_X(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}va\cos y}\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{\mathrm{j}vx} \frac{\mathrm{d}x}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}. \qquad ②$$

比较式①和式②得，$X(t)$的概率密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

注意 有的教材将 v 写成 t，j 写成 i，写法不同，实质是一样的.

(2) 依定义，得

$$\mu_X(t) = E[a\cos(\omega t + \Phi)] = \int_{-\pi}^{\pi} a\cos(\omega t + \Phi)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 0,$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= a^2 E[\cos(\omega t_1 + \Phi)\cos(\omega t_2 + \Phi)] \\ &= a^2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\cos(\omega t_1 + \varphi)\cos(\omega t_2 + \varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &= a^2/2 \cdot \cos\omega(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

(3) 令 $t_1 = t_2 = t$，则 $R_X(t,t) = a^2/2$，得

$$\begin{aligned} \sigma_X^2(t) &= D[X(t)] = E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\} \\ &= E[X^2(t)] - \mu_X(t) = R_X(t,t) - 0 = a^2/2. \end{aligned}$$

例 7 设有两个随机过程 $X(t) = A\sin(\omega t + \theta)$ 与 $Y(t) = B\sin(\omega t + \theta - \varphi)$，其中 A, B, ω, φ 为常数，θ 为$[0, 2\pi]$上均匀分布的随机变量. 求 $R_{XY}(t_1, t_2)$.

解 设 $t_1 < t_2$，则

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\ &= \int_0^{2\pi} A\sin(\omega t_1 + \theta)B\sin(\omega t_2 + \theta - \varphi)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{AB}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\omega t_1 + \theta)\{\sin(\omega t_1 + \theta)\cos[\omega(t_2 - t_1) - \varphi] \\ &\quad + \cos(\omega t_1 + \theta)\sin[\omega(t_2 - t_1) - \varphi]\}\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{AB}{2\pi}\Big[\cos[\omega(t_2-t_1)-\varphi]\int_0^{2\pi}\sin^2(\omega t_1+\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$+\sin[\omega(t_2-t_1)-\varphi]\int_0^{2\pi}\sin(\omega t_1+\theta)\cos(\omega t_1+\theta)\mathrm{d}\theta\Big]$$

$$= \frac{1}{2}AB\cos[\omega(t_2-t_1)-\varphi].$$

第三节　复随机过程

主 要 内 容

1. 设 $X(t)$和 $Y(t)$为实随机过程,则定义**复(值)随机过程**为 $Z(t)=X(t)+\mathrm{j}Y(t)$.

2. 复随机过程 $Z(t)$ 的概率分布可以用二维随机过程 $(X(t),Y(t))^{\mathrm{T}}$ 的所有 $n+m$ 维分布函数或分布密度给出.

复随机过程 $Z(t)$的数学期望为

$$\mu_Z(t)=E[Z(t)]=\mu_X(t)+\mathrm{j}\mu_Y(t),\ t\in T.$$

复随机过程 $Z(t)$的相关函数为

$$R_Z(t_1,t_2)=E[Z(t_1)\overline{Z(t_2)}],\ t_1,t_2\in T.$$

复随机过程 $Z(t)$的协方差函数为

$$C_Z(t_1,t_2)=E\{[Z(t_1)-\mu_Z(t_1)]\overline{[Z(t_2)-\mu_Z(t_2)]}\}$$

$$=R_Z(t_1,t_2)-\mu_Z(t_1)\overline{\mu_Z(t_2)},\ t_1,t_2\in T$$

$Z(t)$的方差是非负的实函数,为

$$D_Z(t)=E\mid Z(t)-\mu_Z(t)\mid^2=C_Z(t,t).$$

$Z(t)$的均方值也是非负的实函数,为

$$\Psi_Z(t)=E\mid Z(t)\mid^2=R_Z(t,t).$$

3. 对两个复随机过程 $Z_1(t)$和 $Z_2(t)$,定义

$$R_{Z_1Z_2}(t_1,t_2)=E[Z_1(t_1)Z_2(t_2)]$$

为互相关函数，

$$C_{Z_1Z_2}(t_1,t_2)=\mathrm{Cov}[Z(t_1)Z(t_2)]$$
$$=E\{[Z_1(t_1)-\mu_{Z_1}(t)]\overline{[Z_2(t_2)-\mu_{Z_2}(t_2)]}\}$$

为互协方差函数.

疑难解析

为什么要引入复随机过程?

答 引入复随机过程既是数学上的推广，也是工程技术上的需要，因为有时把随机过程表示为复数形式会更加方便. 例如，许多有关谱函数的运算要用到傅里叶变换，其中就需要复数表示式.

一般地，设 $X(t)$是一平稳随机过程，其希尔伯特变换为$\hat{X}(t)$，则实随机过程 $X(t)$的复表示定义为 $\tilde{X}(t)=X(t)+\mathrm{j}\hat{X}(t)$，其中 $X(t)=\mathrm{Re}\,\tilde{X}(t)$.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设 A_k 服从$N(0,\sigma_k^2)$分布，θ_k 为常数，$k=1,2,\cdots,N$，各 A_k 相互独立. $Z(t)=\sum\limits_{k=1}^{N}A_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_k t}$，$t\in T=[0,1]$是复值随机过程，求 $\mu_Z(t)$和 $R_Z(t_1,t_2)$.

解 因为 $Z(t)$的实部 $X(t)=\sum\limits_{k=1}^{N}A_k\cos\theta_k t$ 和虚部 $Y(t)=\sum\limits_{k=1}^{N}A_k\sin\theta_k t$ 都是正态分布的线性组合，所以 $Z(t)$也是正态随机过程. 故

$$\mu_Z(t)=E[Z(t)]=E[X(t)]+\mathrm{j}E[Y(t)]=0,$$

$$R_Z(t_1,t_2)=E[Z(t_1)\overline{Z(t_2)}]=E\Big[\Big(\sum_{k=1}^{N}A_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_k t_1}\Big)\Big(\sum_{l=1}^{N}A_l\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_l t_2}\Big)\Big]$$

$$= \sum_{k,l}^{N} E[(A_k A_l) e^{j(\theta_k t_1 - \theta_l t_2)}] = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^{2j\theta_k(t_1-t_2)}.$$

当 $t_1 = t_2$ 时，因为 $\mu_Z(t)=0, C_Z(t_1,t_2)=R_Z(t_1,t_2)$，所以

$$D[Z(t)] = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2.$$

例 2 证明：

(1) $R_{\widetilde{X}}(\tau) = E[\widetilde{X}(t)\overline{\widetilde{X}(t-\tau)}] = 2[R_X(\tau) + j\widehat{R}_X(\tau)]$；

(2) $E[\widetilde{X}(t)\widetilde{X}(t-\tau)] = 0$.

证 (1) 依随机过程的相关函数定义，有

$$\begin{aligned} R_{\widetilde{X}}(\tau) &= E[\widetilde{X}(t)\overline{\widetilde{X}(t-\tau)}] \\ &= E\{[X(t)+j\widehat{X}(t)][X(t-\tau)-j\widehat{X}(t-\tau)]\} \\ &= R_X(\tau) + R_{\widehat{X}}(\tau) + jR_{\widehat{X}X}(\tau) - jR_{X\widehat{X}}(\tau). \end{aligned}$$

因为 $$R_{X\widehat{X}}(\tau) = -\widehat{R}_X(\tau) = -R_{\widehat{X}X}(\tau),$$

故有 $$E[\widetilde{X}(t)\overline{\widetilde{X}(t-\tau)}] = 2[R_X(\tau) + j\widehat{R}_X(\tau)].$$

(2) 计算

$$\begin{aligned} E[\widetilde{X}(t)\widetilde{X}(t-\tau)] &= E\{[X(t)+j\widehat{X}(t)][X(t-\tau)+j\widehat{X}(t-\tau)]\} \\ &= R_X(\tau) + R_{\widehat{X}}(\tau) + jR_{\widehat{X}X}(\tau) + jR_{X\widehat{X}}(\tau), \end{aligned}$$

因为 $$R_{X\widehat{X}}(\tau) = -\widehat{R}_X(\tau) = -R_{\widehat{X}X}(\tau),$$

$$R_{\widehat{X}}(\tau) = -R_X(\tau),$$

所以 $$E[\widetilde{X}(t)\widetilde{X}(t-\tau)] = 0.$$

例 3 定义复随机过程 $X(t) = Yf(t)$，其中 Y 是一个均值为零的实随机变量，而 $f(t)$ 是一个确定性的复函数. 求 $X(t)$ 的数字特征（设 $f(t) = c e^{j(\lambda t+\theta)}$）.

解 若 $f(t) = c e^{j(\lambda t+\theta)}$，则 $X(t) = cYe^{j(\lambda t+\theta)}$.

$$E[X(t)] = E[Y] c e^{j(\lambda t+\theta)} = 0,$$

$$\begin{aligned} E[X(t+\tau)\overline{X(t)}] &= E[Yc e^{j[\lambda(t+\tau)+\theta]} Yc e^{-j(\lambda t+\theta)}] \\ &= E[Y^2] c^2 e^{j\lambda\tau} = \sigma^2 c^2 e^{j\lambda\tau}, \end{aligned}$$

其中 $$\sigma^2 = E[Y^2].$$

第四节　常用的随机过程

主 要 内 容

1. 设 $X_T=\{X(t),t\in T\}$是一个(复值或实值)随机过程，若对于每一个 $t\in T$，都有 $E[|X(t)|^2]<\infty$(即二阶矩存在)，则称 X_T 为**二阶矩过程**.

$\Gamma_X(s,t)=(X(t),X(s))$，$t,s\in T$ 称为**二阶矩函数**.

二阶矩过程 X_T 的均值函数 $m(t)=E[X(t)]$总存在. 一般都假定 $m(t)=0$. 这时，协方差函数化为

$$C_X(s,t)=E[X(s)\overline{X(t)}],\quad s,t\in T.$$

二阶矩过程的协方差函数有以下性质：

(1) 协方差函数 $C_X(s,t)$具有埃尔米特(Hermite)性，即

$$C_X(s,t)=\overline{C_X(t,s)},\quad s,t\in T.$$

若二阶矩过程是实的，则 $X(t)$是实值随机变量，$C_X(s,t)$是对称函数，即 $C_X(s,t)=C_X(t,s)$.

(2) 协方差函数 $C_X(s,t)$具有非负定性，即对任意有限个 t_1，$t_2,\cdots,t_n\in T$ 和任意的普通复函数 $\theta(t)$，$t\in T$，其埃尔米特二次型

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_X(t_k,t_j)\theta(t_k)\overline{\theta(t_j)}\geqslant 0.$$

2. 设 $X_T=\{X(t),t\in T\}$是一个复值二阶矩过程，若对任意的 $t_1,t_2,t_3,t_4\in T$，且 $t_1<t_2<t_3<t_4$，有

$$E\{[X(t_2)-X(t_1)]\overline{[X(t_4)-X(t_3)]}\}=0,$$

则称 $X(t)$是**正交增量过程**.

正交增量过程的协方差函数可由其方差确定. 有

$$C_X(s,t)=R_X(s,t)=\sigma_X^2(\min\{s,t\}).$$

对于零均值的正交增量过程 $X_T=\{X(t),\ t\in[a,b]\}$，定义

$F(s)=E[|X(s)|^2]$, $s\in[a,b]$,则

(1) 有非负性,即 $F(s)\geqslant 0$, $s\in[a,b]$.

(2) X_T 的协方差函数 $C_X(s,t)=F(\min\{s,t\})$, $s,t\in[a,b]$.

(3) 单调不减,即当 $s<t$ 时,$F(s)\leqslant F(t)$.

3. 设随机过程 $X_T=\{X(t),\ t\in T\}$ 的一切有限维分布函数 $F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 当点 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 沿时间轴作任意平移时都不改变,即对任意自然数 n,任意 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$,任意实数 τ,当 $t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau\in T$ 时,都有

$$F(t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau;x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=F(t_1,t_2,\cdots,t_n;\ x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则称 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 为**严平稳过程**.

严平稳过程的二阶矩不一定存在.

4. 设 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 是一个复值二阶矩过程,若 X_T 满足

$$m_X(t)=m_X(\text{常数}),\quad C_X(s,t)=C(s-t).$$

即协方差函数 $C_X(s,t)$ 只与 $s-t$ 有关,与 s,t 无关,则称 X_T 为**宽平稳过程**,简称**平稳过程**.

关于平稳过程的详细内容见第六、七章.

5. 如果对于任意的 $n\geqslant 1$ 及任意的 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$,n 个随机变量 $X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$ 的联合分布函数是 n 维正态分布函数,则称随机过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 是**正态随机过程**或**高斯随机过程**.

正态随机过程是二阶矩过程.

正态随机过程的 n **元特征函数**是

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)=\exp\left(\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}\theta_k m_k-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_j\lambda_{jk}\theta_k\right),$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 为 n 个实变量,$m_k=E[X(t_n)]$, $\lambda_{jk}=C(t_j,t_k)$是 $X(t_j)$与 $X(t_k)$的协方差.

令 $\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,\cdots,m_n)$, $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$为向量形式. 令协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn}\end{pmatrix},$$

则 n 元特征函数可写为

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;\theta)=\exp\left(\mathrm{j}\boldsymbol{m}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\right),$$

其中 $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的转置.

当 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是正定时，$\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$存在，其 n 维分布密度函数是

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n;\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,|\,\boldsymbol{\Lambda}\,|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^{\mathrm{T}}\right].$$

式中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

正态随机过程的详细内容见第八章.

6. 如果随机过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$具有马尔可夫性，即对于 T 中的任意有限个点 $s_1<s_2<\cdots<s_n<s<t$，状态空间 I 中的任意点 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$与 x，以及 E 中任意波雷尔(Borel)集 A，都有

$$P\{X(t)\in A\mid X(s_1)=x_1,\ X(s_2)=x_2,\cdots,X(s_n)=x_n,X(s)=x\}$$
$$=P\{X(t)\in A\mid X(s)=x\},$$

则称 $X_T=\{X(t),t\in T\}$**是马尔可夫过程**，而称上式具有马尔可夫性.

马尔可夫过程的详细内容见第三、四章.

7. 设 $X_T=\{X(t),t\in T\}$是一个随机过程，如果对于任意自然数 $n\geqslant 2$，以及任意的 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，且 $t_1<t_2<\cdots<t_n$，过程的增量 $X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_n)-X(t_1)$相互独立，则称 X_T 为**独立增量过程**.

设有独立增量过程 X_T，如果对于任意实数 $\tau>0$，以及任意 $t_1,t_2,t_1+\tau,t_2+\tau\in T$，且 $t_1<t_2$，随机变量 $X(t_2+\tau)-X(t_1+\tau)$与 $X(t_2)-X(t_1)$有相同的分布，则称 X_T 为**平稳独立增量过程**.

独立增量过程 X_T 是马尔可夫过程.

如果独立增量过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 是一个均值为零的二阶矩过程,则 X_T 也是一个正交增量过程.

8. 实值随机过程 $X_T=\{X(t),t\in[0,\infty)\}$ 如果满足:

(1) X_T 是平稳独立增量过程,

(2) $X(0)=0$(或 $P\{X(0)=0\}=1$),

(3) 对任意 $s,t\geqslant 0$,$X(t)-X(s)$ 服从正态分布

$$N(0,\sigma^2\,|\,t-s\,|),\quad \sigma>0$$

(参数 σ 反映各种不同过程的特性),则称 $\{X(t),t\in[0,\infty)\}$ 为维纳(Wiener)过程或维纳-列维(Levy)过程,或布朗运动过程.

若 $X_T=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是维纳过程,则 $\mu(t)=E[X(t)]=0$,$C(s,t)=\sigma^2\min\{s,t\}$, $s,t\geqslant 0$.

维纳过程是正态过程.

9. 设随机计数过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$,其状态仅取非负整数值,且满足:

(1) 零初值性 $P\{N(0)=0\}=1$.

(2) 平稳性 对任意的 $t\geqslant s\geqslant 0$,$\Delta t>0$,有

$$P\{[N(t)-N(s)]=k\}$$
$$=P\{[N(t+\Delta t)-N(s+\Delta t)]\}=k\},\quad k\geqslant 0.$$

(3) 对任意正整数 n 及非负实数 $0\leqslant t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n$,有

$$N(t_1)-N(t_2),\ N(t_2)-N(t_1),\ \cdots,\ N(t_n)-N(t_{n-1})$$

相互独立.

(4) 随机性 $P\{[N(t+\Delta t)-N(t)]=0\}=p$, $0<p<1$,

及
$$\sum_{k=0}^{\infty}P\{[N(t+\Delta t)-N(t)]=k\}=1,\ t,\Delta t\geqslant 0.$$

(5) 单跳跃 若

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{P\{[N(t+\Delta t)-N(t)]=k\}}{\Delta t}=0,$$

则称随机过程为泊松(Poisson)过程.

若$\{X(t),t\geqslant 0\}$是强度为λ的泊松过程，则

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

$$C(s,t)=\lambda\min\{s,t\},\quad s,t\geqslant 0.$$

泊松过程的详细内容见第二章.

此外，还有鞅(Martingale)过程、随机点过程等. 有兴趣的读者可自行学习和研究.

疑 难 解 析

1. 宽平稳过程与严平稳过程有何联系与区别?

答 宽平稳过程是一个二阶矩过程，它的一阶统计特征与二阶统计特征不随时间的推移而改变，但并不是一切统计特征都不随时间的推移而改变. 而严平稳过程的一切有限维分布都不随时间的推移而改变，从而对平稳性的要求比宽平稳过程更严，这就是它被称为严平稳过程的原因.

一般，严平稳过程的二阶矩不一定存在，因而未必是二阶矩过程，也不一定是宽平稳过程. 当严平稳过程的二阶矩存在时，它一定是宽平稳过程，例如正态随机过程.

2. 为什么独立增量过程是马尔可夫过程?

答 设$\{X(t),t\in T\}$是独立增量过程. 取$T=[0,\infty)$，规定初始分布$P\{X(0)=x_0\}=1$，则对任意$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n<t$，显然$X(t)-X(t_n)$与$X(t_1)(=X(t_1)-X(0)+X(0))$，$X(t_2)-X(t_1)$，$\cdots$，$X(t_{n-1})-X(t_{n-2})$相互独立. 所以，已知$X(t_n)$时，$X(t)(=X(t)-X(t_n)+X(t_n))$与$X(t_1)$，$X(t_2)(=X(t_2)-X(t_1)+X(t_1))$，$\cdots$，$X(t_{n-1})(=X(t_{n-1})-X(t_{n-2})+X(t_{n-2}))$相互独立. 从而$\{X(t),t\in T\}$是一个马尔可夫过程.

特别地，若独立增量过程$\{X(t),t\in T\}$是一个均值为零的二阶矩过程，则$\{X(t),t\in T\}$还是一个正交增量过程. 因为，当

$t_i \in T, i=1,2,3,4$，且 $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ 时，恒有

$$E\{[X(t_2)-X(t_1)]\overline{[X(t_4)-X(t_3)]}\}$$
$$= E[X(t_2)-X(t_1)]E\overline{[X(t_4)-X(t_3)]} = 0,$$

故$\{X(t), t\in T\}$是正交增量过程.

方法、技巧与典型例题分析

熟悉各种随机过程的定义、性质和特点，是辨析、区分随机过程的条件，更为重要的是从问题的表象找出本质的东西.

例 1 一个正弦振荡器，由于器件的热噪声和分布参数变化的影响，输出的正弦波可视作一个随机过程 $X(t)=A\sin(\Omega t+\Theta)$，其中振幅 A，角频率 Ω 和相位 Θ 是相互独立的随机变量. 设

$$f_A(a)=\begin{cases}2a/A_0^2, & 0\leqslant a\leqslant A_0,\\ 0, & \text{其它};\end{cases}$$

$$f_\Omega(\omega)=\begin{cases}1/100, & 250\leqslant \omega\leqslant 350,\\ 0, & \text{其它};\end{cases}$$

$$f_\Theta(\theta)=\begin{cases}1/(2\pi), & 0\leqslant \theta\leqslant 2\pi,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $X(t)$的一维概率密度并确定 $X(t)$是否一阶平稳过程.

解 设 $Y(t)=\sin(\omega t+\Theta)$，其中 ω 是常数. 由于对任意时刻 t，$Y(t)$不是 Θ 的单调函数，可以用特征函数法求得

$$f_Y(y)=\begin{cases}1/(\pi\sqrt{1-y^2}), & |y|<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

又设 $Z(t)=a\sin(\omega t+\Theta)=aY(t)$，其中 a,ω 为常数，则

$$f_Z(z)=f_Y\left(\frac{z}{a}\right)\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right|=\begin{cases}1/(\pi\sqrt{a^2-z^2}), & |z|<a,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

比较 $X(t)$与 $Z(t)$知，$Z(t)=X(t|A=a,\Omega=\omega)$，即 $Z(t)$是 $X(t)$的条件形式，因此有

$$f_Z(z) = f_{X|A,\Omega}(x \mid a,\omega).$$

故
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,a,\omega)\mathrm{d}a\mathrm{d}\omega$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A,\Omega}(x \mid a,\omega) f_A(a) f_\Omega(\omega)\mathrm{d}a\mathrm{d}\omega$$
$$= \int_x^{A_0} \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{2a}{A_0^2}\mathrm{d}a\int_{250}^{350}\frac{1}{100}\mathrm{d}\omega$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi A_0^2}\sqrt{A_0^2-x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant A_0, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

可以看出 $f_X(x)$ 与 t 无关，所以知 $X(t)$ 是一阶平稳过程.

例 2 设有随机过程 $X(t)=f(t+v)$，其中 $f(t)$ 是具有周期 T 的周期波，v 是区间 $(0,T)$ 内服从均匀分布的随机变量，证明：$X(t)$ 是平稳随机过程.

证 由题设知

$$f_v(v) = \begin{cases} 1/T, & 0 < v < T, \\ 0, & 其它, \end{cases}$$

于是可以求得

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f_v(v)\mathrm{d}v = \int_0^T f(t+v)\frac{1}{T}\mathrm{d}v$$
$$\xlongequal{t+v=s} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\mathrm{d}s = m_X,$$

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_0^T f(t_1+v)f(t_2+v)\frac{1}{T}\mathrm{d}v$$
$$= \frac{1}{T}\int_{t_1}^{T+t_1} f(s)f(s+t_2-t_1)\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(s)f(s+t_2-t_1)\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(s)f(s-\tau)\mathrm{d}s, \quad \tau = t_1 - t_2,$$

所以 $X(t)$是平稳随机过程.

例 3 设 $X(t)=A\cos\theta t+B\sin\theta t\ (0\leqslant t\leqslant 1)$,其中 A,B 相互独立,是服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$的随机变量,θ 是常数,证明:$X(t)$是二阶矩过程.

证 因为 $E[X(t)]=E[A]\cos\theta t+E[B]\sin\theta t$,

$$D[X(t)]=E[X^2(t)]=\sigma^2,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

所以二阶矩存在,$\{X(t),t\in[0,1]\}$是二阶矩过程.

例 4 设 $X(t)=X_0+Yt,a\leqslant t\leqslant b$,其中 X_0 与 Y 是相互独立且服从 $N(0,1)$的随机变量. 证明:$X(t)$是二阶矩过程,又是正态随机过程.

证 因为 $X_0,Y\sim N(0,1)$,所以对每个 $t\in T=[a,b]$,$X(t)$服从正态分布 $N(0,1+t^2)$. 事实上,有

$$E[X(t)]=E[X_0]+E[Y]t=0,$$

$$D[X(t)]=D[X_0]+t^2D[Y]=1+t^2,\quad t\in[a,b],$$

$$R_X(t_1,t_2)=C_X(t_1,t_2)=1+t_1t_2,\quad t_1,t_2\in[a,b],$$

从而 $X(t)$是二阶矩过程.

因为 $X(t)=X_0+Yt$,所以 $X(t_i)=X_0+Yt_i$, $i=1,2,\cdots,n$,令

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}X_0+Yt_1\\X_0+Yt_2\\\vdots\\X_0+Yt_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}X_0\\Y\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&t_1\\1&t_1\\\vdots&\vdots\\1&t_n\end{bmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi}$. 由于 $\boldsymbol{\xi}$ 是服从二维正态分布的随机变量,则依 n 维正态分布的性质,$\boldsymbol{X}$ 是正态分布的随机变量,即$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$服从 n 维正态分布. 从而 $X(t)$是正态随机过程.

例 5 在独立重复试验中,若每次试验时事件 A 发生的概率为 $p\ (0<p<1)$. 以 $X(n)$记进行到 n 次试验为止 A 发生的次数. 证明$\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$是一个独立增量过程.

证 显然,$\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 服从二项分布,记 $X_n\sim$

$b(n,p)$，则称$\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$为**二项过程**. 令$Y_n=X(n)-X(n-1),n=1,2,\cdots$，则$Y_n$是第$n$次试验时$A$发生的次数，故有

$$P\{Y_n=0\}=1-p,\quad P\{Y_n=1\}=p,\ n=1,2,\cdots,$$

$$X(n+m)-X(n)\sim b(m,p),\ n=1,2,\cdots,$$

所以$\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$是一个平稳独立增量过程.

例 6 设一质点自坐标轴原点沿轴作随机游动，每隔 1 秒以概率p向右移动 1 格(单位距离)，以概率$q=1-p$向左移动 1 格. 以$X(n)$记质点在第n秒至$n+1$秒间的位置，证明：$X(n)$是一平稳独立增量过程.

证 $X(n)$的分布为

$$P\{X(n)=k\}=\begin{cases} C_n^{\frac{n+k}{2}}p^{\frac{n+k}{2}}q^{\frac{n-k}{2}}, & \text{当} |k|\leqslant n \text{且} \dfrac{n+k}{2} \text{为整数时}, \\ 0, & \text{当} |k|>n \text{或} \dfrac{n+k}{2} \text{为非整数时}. \end{cases}$$

增量$X(n+m)-X(n)$的分布为

$$P\{X(n+m)-X(n)=i\}=\begin{cases} C_m^{\frac{m+i}{2}}p^{\frac{m+i}{2}}q^{\frac{m-i}{2}}, & \text{当}|i|\leqslant m \text{且} \dfrac{m+i}{2} \text{为整数时}, \\ 0, & \text{当}|i|>m \text{或} \dfrac{m+i}{2} \text{为非整数时}. \end{cases}$$

例 7 设$\{X(t),t\in T\}$是实正交增量过程，$T=[0,\infty)$，$X(0)=0$，ξ是一服从标准正态分布的随机变量，若对任一$t\geqslant 0$，$X(t)$都与ξ相互独立. 求$Y(t)=X(t)+\xi,t\in[0,\infty)$的协方差函数.

解 因为 $E[X(t)]=0,\quad E[\xi]=0,$

所以 $E[Y(t)]=E[X(t)]+E[\xi]=0,$

$$\begin{aligned} C_Y(s,t)&=E[Y(s)Y(t)]=E\{[X(s)+\xi][X(t)+\xi]\} \\ &=E[X(s)X(t)]+E[X(s)\xi]+E[X(t)\xi]+E[\xi^2] \\ &=C_X(s,t)+1=F(\min\{s,t\})+1. \end{aligned}$$

例 8 设$\{W(t),t\geqslant 0\}$是以σ^2为参数的维纳过程，求下列过

程的协方差函数：

(1) $W(t)+At$, (A 为常数)；

(2) $W(t)+X(t)$, $X(t)\sim N(0,1)$且与 $W(t)$相互独立；

(3) $aW(t/a^2)$, $a>0$ 常数.

解 (1) 令 $Y(t)=W(t)+At$,则

$$\mu_Y(t)=E[W(t)]+AE[t]=At,$$

而 $C_Y(t_1,t_2)=E\{[W(t_1)+At_1-At_1][W(t_2)+At_2-At_2]\}$

$$=E[W(t_1)W(t_2)]=\sigma^2\min\{t_1,t_2\},\ t_1,t_2\geqslant 0.$$

(2) 令 $Y(t)=W(t)+X(t)$,则

$$\mu_Y(t)=E[W(t)]+E[X(t)]=0,$$

$$\begin{aligned}C_Y(t_1,t_2)&=E\{[W(t_1)+Xt_1][W(t_2)+Xt_2]\}\\&=E[W(t_1)W(t_2)]+E[W(t_1)Xt_2]\\&\quad+E[W(t_2)Xt_1]+E[Xt_1Xt_2]\\&=\sigma^2\min\{t_1,t_2\}+t_1t_2,\quad t_1,t_2\geqslant 0.\end{aligned}$$

(3) 令 $Y(t)=aW(t/a^2)$,则 $\mu_Y(t)=a\cdot\frac{1}{a^2}E[W(t)]=0.$

$$\begin{aligned}C_Y(t_1,t_2)&=E[aW(t_1/a^2)aW(t_2/a^2)]=a^2E[W(t_1/a^2)W(t_2/a^2)]\\&=a^2\sigma^2\min\{t_1/a^2,t_2/a^2\}=\sigma^2\min(t_1,t_2),\ t_1,t_2\geqslant 0.\end{aligned}$$

例 9 设$\{W(t),t\in[0,\infty)\}$是以 σ^2 为参数的维纳过程,a 为一固定正数,令 $X(t)=W(a+t)-W(t)$,$t\in[0,\infty)$,求 $m(t)=E[X(t)]$与 $C_X(s,t)=\mathrm{Cov}[X(s),X(t)]$.

解 $m(t)=E[X(t)]=E[W(a+t)]-E[W(t)]=0,$

$$\begin{aligned}C_X(s,t)&=\mathrm{Cov}[X(s),X(t)]=E[X(s)X(t)]\\&=E[W(a+s)W(a+t)-W(a+s)W(t)\\&\quad-W(a+t)W(t)+W(s)W(t)]\\&=\sigma^2\min\{a+s,a+t\}-\sigma^2\min\{a+s,t\}\\&\quad-\sigma^2\min\{a+t,t\}-\sigma^2\min\{s,t\}\\&=\begin{cases}0, & a\leqslant|t-s|,\\ [a-|t-s|]\sigma^2, & a>|t-s|.\end{cases}\end{aligned}$$

第二章　泊松随机过程

第一节　泊 松 过 程

主 要 内 容

1. 如果 $N(t)$表示到时刻 t 为止某一事件 A 发生的总数，则称$\{N(t), t\geqslant 0\}$为**计数过程**. 它是一个状态取非负整数、时间连续的随机过程.

计数过程满足以下条件：

(1) $N(t)\geqslant 0$，是一个正整数；

(2) 如果有两个时刻 s 和 t，且 $s<t$，则 $N(s)\leqslant N(t)$；

(3) 对于 $s<t$，$N(t)-N(s)$代表在时间区间$[s,t]$内事件 A 出现的次数.

在计数过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$中，如果在不相重叠的时间区间内出现 A 的次数是相互独立的，则称 $N(t)$为**独立增量过程**.

在计数过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$中，如果在任一时间区间内 A 发生的次数只与时间的长短有关，而与起始时刻无关，即 $N(t_1+s)-N(t_1)$仅与 s 有关而与 t_1 无关，则称该过程为**平稳增量过程**.

2. 若计数过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$满足：

(1) $N(0)=0$，

(2) 是独立增量过程，又是平稳增量过程，

(3) 对于充分小的 Δt，在$(t,t+\Delta t)$内出现一次事件的概率为

$$P\{N(t,t+\Delta t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

其中 $\lambda>0$ 为常数，称为过程 $N(t)$ 的强度，

(4) 对于充分小的 Δt，在 $(t,t+\Delta t)$ 内出现两次或两次以上事件的概率为 $o(\Delta t)$，即

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geqslant 2\}=o(\Delta t),$$

则称此计数过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是**强度为 λ 的泊松过程**. 相应的事件流（即事件出现的随机时刻 $t_1,t_2,\cdots$）称为**强度为 λ 的泊松流**.

3. 泊松过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 在时间区间 $[t_0,t_0+t]$ 内 n 次出现事件 A 的概率为

$$P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

4. 泊松过程的数字特征：

(1) 均值　$E[N(t_0+t,t_0)]=\lambda t$；

(2) 均方值　$E[N^2(t_0+t,t_0)]=(\lambda t)^2+\lambda t$；

(3) 方差　$D[N(t_0+t,t_0)]=\lambda t$；

(4) 协方差函数　$C_N(t_1,t_2)=\lambda\min(t_1,t_2),t_1,t_2\geqslant 0$；

(5) 相关函数　$R_N(t_1,t_2)=\lambda^2 t_1 t_2+\lambda\min(t_1,t_2)$，

当 $t_1=t_2$ 时，有　　$R_N(t,t)=\lambda t(1+\lambda t)$.

疑 难 解 析

为什么泊松过程定义(主要内容 2)中的条件(3)、(4)与主要内容 3 是等价的?

答　这实际上是泊松过程的两个不同定义. 因为，记 $P_n(t)=P\{N(t)=n\}=P\{[N(t)-N(0)]=n\}$，而区间 $[0,t+\Delta t]$ 可以分为不相重叠的时间区间 $[0,t]$ 与 $(t,t+\Delta t]$，在 $(0,t+\Delta t]$ 内出现 k 个事件可以写成

$$\begin{aligned}P_k(t+\Delta t)&=P_k(t)P_0(\Delta t)+P_{k-1}(t)P_1(\Delta t)+o(\Delta t)\\&=P_k(t)[1-\lambda\Delta t]+P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+o(\Delta t),\end{aligned}$$

则 $$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=-\lambda P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

令 $\Delta t\to 0$，得

$$\frac{\mathrm{d}P_k(t)}{\mathrm{d}t}+\lambda P_k(t)=\lambda P_{k-1}(t),\quad k=1,2,\cdots.$$

该式是一系列递推微分方程式.

在$[0,t+\Delta t]$内不出现事件可以写成

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)P_0(\Delta t)=P_0(t)[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)],$$

则 $$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

令 $\Delta t\to 0$，得

$$\frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t}=-\lambda P_0(t)\Rightarrow P_0(t)=B_0\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

由假设 $P_0(t)=P\{N(t)=0\}=P\{[N(t)-N(0)]=0\}$，

得 $$P_0(0)=P\{N(0)=0\}=1\Rightarrow B=1\Rightarrow P_0(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

当递推微分方程式中 $k=1$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}P_1(t)}{\mathrm{d}t}+\lambda P_1(t)=\lambda P_0(t)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

解得 $$P_1(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t+B_1).$$

因此$P_1(0)=P\{N(0)=1\}=0\Rightarrow B_1=0\Rightarrow P_1(t)=\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

逐次利用递推微分方程式，并使用数学归纳法可得

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

即 $$P_n(t)=P\{[N(t)-N(0)]=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

由于是平稳增量过程，故

$$P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

从而 $E[N(t)]=\lambda t$，即 $\lambda=\dfrac{E[N(t)]}{t}$. 因此 λ 是单位时间内事件出现的平均次数.

方法、技巧与典型例题分析

认真理解泊松过程的定义是确定随机过程是否为泊松过程的基础，通常通过计算 $P\{Y(t)=k\}$ 来确定泊松过程的强度. 在计算泊松过程的数字特征时，要善于利用计算随机变量数字特征的技巧与方法.

例 1 设在时间区间 $[0,t]$ 内到商店的顾客数 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程，每个顾客购买货物的概率为 p，不购货物的概率为 $1-p$，且他们是否购买货物是相互独立的. 令 $Y(t)$ 为 $(0,t)$ 内购买货物的顾客数，证明：$\{Y(t),t\geqslant 0\}$ 是强度为 λp 的泊松过程.

证 显然 $Y(0)=0$，$Y(t)$ 是独立增量过程和平稳增量过程.

$$\begin{aligned}
P\{Y(t)=k\} &= \sum_{i=k}^{\infty} P\{N(t)=i\}P\{Y(t)=k \mid N(t)=i\} \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^i \mathrm{e}^{-\lambda}}{i!} C_i^k p^k (1-p)^{i-k} \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^{i-k}}{i!} \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k} \\
&= \sum_{i-k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda} p^k}{k!} \cdot \frac{[\lambda(1-p)]^{i-k}}{(i-k)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \mathrm{e}^{[\lambda(1-p)]} = \frac{(\lambda p)^k \mathrm{e}^{-\lambda p}}{k!}.
\end{aligned}$$

由上述可知，$\{Y(t),t\geqslant 0\}$ 是强度为 λp 的泊松过程.

也可以这样证明：对任一 $t>0$，有

$$\begin{aligned}
P\{Y(t)=k\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{Y(t)=k \mid N(t)=k+n\}P\{N(t)=k+n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} C_{k+n}^k p (1-p)^n \frac{(\lambda t)^{k+n}}{(k+n)!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda p t)^k [\lambda(1-p)t]^n}{k!n!}
\end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda pt)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)t]^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)t} = e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^k}{k!},$$

所以，$\{Y(t), t\geqslant 0\}$是强度为 λp 的泊松过程.

注意 两个证法有所不同. 前者是在 t 确定的情况下，对每一固定的 t 讨论的，$Y(t)$是一随机变量，所以 $P\{Y(t)=k\}$中不含 t. 后者是对任一 t 讨论的，所以 $P\{Y(t)=k\}$中含 t. 在以后的解题中要注意泊松分布与泊松过程的区别，泊松过程的概率和数字特征都含 t；而泊松分布不含 t，但泊松过程的每一固定的 t 可以用泊松分布处理.

例 2 通过某十字路口的车流是一泊松过程. 设 1 min 内没有车辆通过的概率为 0.2，求 2 min 内有多于一辆车通过的概率.

解 以 $N(t)$表示在$[0,t)$内通过的车辆数，设$\{N(t), t\geqslant 0\}$是泊松过程，则

$$P\{N(t)=k\} = v_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad k=0,1,2,\cdots,$$

故 $$P\{N(1)=0\} = v_0(1) = e^{-\lambda} = 0.2 \Rightarrow \lambda = -\ln 0.2,$$

$$\begin{aligned}&P\{N(2)>1\}\\&= 1-P\{N(2)\leqslant 1\} = 1-v_0(2)-v_1(2)\\&= 1-e^{-2\lambda}-2\lambda e^{-2\lambda} = 1-(0.2)^2+2\ln 0.2\cdot(0.2)^2 = 0.83.\end{aligned}$$

例 3 在时间 t 内向电话总机呼叫 k 次的概率为 $p_t(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,1,2,\cdots$，其中 $\lambda>0$ 为常数. 如果任意两相邻的时间间隔内的呼叫次数是相互独立的，求在时间 $2t$ 内呼叫 n 次的概率 $P_{2t}(n)$.

解 以 A 记时间 $2t$ 内呼叫 n 次的事件，记第一时间间隔内呼叫为 H_k，则 $P(H_k)=P_t(k)$，第二时间间隔内 $P(A\mid H_k)=P_t(n-k)$成立，于是

$$P_{2t}(n) = \sum_{k=0}^{n}P_t(k)P_t(n-k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda}$$

$$= e^{-2\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^n}{k!(n-k!)} = e^{-2\lambda}\lambda^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{1}{n!}$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!}e^{-2\lambda}2^n = \frac{(2\lambda)^n}{n!}e^{-2\lambda}.$$

例 4 设随机变量 X,Y 相互独立，并分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松分布，证明：

$$P\{X=k \mid X+Y=n\} = C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}.$$

证 由概率论中的卷积公式并依独立性，有

$$P\{X+Y=n\} = \sum_{i=0}^{n}P\{X=i, Y=n-i\} = \sum_{i=0}^{n}P\{X=i\}P\{Y=n-i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-i}}{(n-i)!}e^{-\lambda_2} = \frac{1}{n!}e^{-\lambda_1+\lambda_2}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{n-i}$$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)},$$

又由概率乘法公式可得

$$P\{x=k \mid X+Y=n\} = \frac{P\{X=k, X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$= \frac{P\{X=k, Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}} = \frac{P\{X=k\}P\{Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$= \left[\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!}\,\frac{\lambda_2^{n-k}e^{-\lambda_2}}{(n-k)!}\right]\Big/\left[\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\right]$$

$$= C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}.$$

例 5 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量. 随机变量 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$. 证明：若 X_i 是服从参数为 λ_i 的泊松分布，则 Y 服从参数为 λ_Y 的泊松分布，且 $\lambda_Y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.

解 因为 X_i 的特征函数 $\varphi_{x_i}(v)=\exp\{\lambda_i(e^{jv}-1)\}$，由独立

性，Y 的特征函数

$$\varphi_Y(v)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}(v)=\exp\Big\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(e^{jv}-1)\Big\}$$

$$=\exp\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big)(e^{jv}-1)\Big\}=\exp\{\lambda_Y(e^{jv}-1)\}.$$

其中 $\lambda_Y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. 故 Y 服从参数为 λ_Y 的泊松分布.

例 6 设 $X(t)$是参数为 λ 的泊松过程，证明：$X(t)$的特征函数为 $\varphi(v)=E[e^{jvX(t)}]=e^{\lambda t(e^{jv}-1)}$；对 $t_2>t_1$ 及两个整数 m 和 n，有

$$P\{X(t_1)=m,X(t_2)=m+n\}=e^{-\lambda t}\lambda^{m+n}\frac{(t_2-t_1)^n t_1{}^n}{m!n!}.$$

证 因为 $P\{X(t)=k\}=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k=0,1,2,\cdots,$

所以
$$\varphi(v)=E[e^{jvX(t)}]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{jvk}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{jv}\lambda t)^k}{k!}$$

$$=e^{-\lambda t}e^{\lambda t e j v}=e^{\lambda t(e^{jv}-1)}.$$

由于泊松过程是独立增量过程，故

$$P\{X(t_1)=m,X(t_2)=m+n\}$$
$$=P\{X(t_1)=m,X(t_2)-X(t_1)=n\}$$
$$=P\{X(t_1)=m\}P\{X(t_2)-X(t_1)=n\}$$
$$=e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^m}{m!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\frac{\lambda^n(t_2-t_1)^n}{n!}=e^{-\lambda t_2}\lambda^{m+n}\frac{(t_2-t_1)^n}{m!n!}t_1{}^m.$$

例 7 设$\{N(t),t\geqslant0\}$是强度为 λ 的泊松过程，定义随机过程 $Y(t)=N(t+L)-N(t)$，常数 $L>0$，求 $Y(t)$的均值函数和相关函数.

解 $Y(t)$的均值函数

$$\mu_Y(t)=E[N(t+L)-N(t)]$$

$$= E[N(t+L)] - E[N(t)] = \lambda(t+L) - \lambda t = \lambda L.$$

$Y(t)$的相关函数

$$\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) &= E\{[N(t_1+L) - N(t_1)][N(t_2+L) - N(t_2)]\} \\
&= E[N(t_1+L)N(t_2+L)] - E[N(t_1+L)N(t_2)] \\
&\quad - E[N(t_1)N(t_2+L)] + E[N(t_1)N(t_2)] \\
&= \lambda^2(t_1+t_2)(t_2+L) + \lambda\min\{t_1+L,t_2+L\} - \lambda^2 t^2(t_1+L) \\
&\quad - \lambda\min\{t_1+L,t_2\} - \lambda^2 t_1(t_2+L) - \lambda\min\{t_1,t_2+L\} \\
&\quad + \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda\min\{t_1,t_2\} \\
&= \lambda^2 L^2 + \lambda\min\{t_1+L,t_2+L\} + \lambda\min\{t_1,t_2\} \\
&\quad - \lambda\min\{t_1+L,t_2\} - \lambda\min\{t_1,t_2+L\} \\
&= \begin{cases} \lambda^2 L^2 + \lambda(L - |\tau|), & |\tau| \leqslant L, \\ \lambda^2 L^2, & |\tau| > L, \end{cases} \quad \tau = t_2 - t_1.
\end{aligned}$$

例 8 设顾客到达商场的速率为 2 个/min，求：

(1) 在 5 min 内到达顾客数的平均值；

(2) 在 5 min 内到达顾客数的方差；

(3) 在 5 min 内至少有一个顾客到达的概率.

解 以 $N(t)$表示在$[0,t)$内到达的顾客数，显然$\{N(t),t\geqslant 0\}$是泊松过程，$\lambda=2$，则当 $t=5$ 时，$N(5)$服从泊松分布

$$P\{N(5)=k\} = \frac{(2\times 5)^k}{k!}e^{-2\times 5}, \quad k=0,1,2,\cdots.$$

故 (1) $E[N(5)]=10$；

(2) $D[N(5)]=10$；

(3) $P\{N(5)\geqslant 1\}=1-P\{N(5)=0\}=1-e^{-10}$.

例 9 设$\{X(t),t\geqslant 0\}$是一个独立增量过程，且 $X(0)=0$，若有 $F(t)$表示 $X(t)$的方差函数

$$F(t) = E\{X(t) - E[X(t)]^2\},$$

(1) 证明 $X(t)$的协方差函数 $C_X(t,s)$满足

$$C_X(t,s) = E\{[X(t) - E\{X(t)\}][X(s) - E\{X(s)\}]\}$$

$=F[\min(s,t)]$;

(2) 对应泊松过程求出 $F(t)$ 和 $C_X(t,s)$.

解 (1) 依定义,设 $E[X(t)]=\mu(t)$. 若 $t<s$,则

$$
\begin{aligned}
C_X(t,s)&=E\{[X(t)-\mu(t)][X(s)-\mu(s)]\}\\
&=E\{[X(t)-\mu(t)]\\
&\quad\cdot[X(s)-\mu(s)+X(t)-\mu(t)-X(t)+\mu(t)]\}\\
&=E\{[X(t)-\mu(t)]^2\}\\
&\quad+E\{[X(t)-\mu(t)][X(s)-\mu(s)-X(t)+\mu(t)]\}\\
&=F(t)+E\{[X(t)-\mu(t)]\}E\{X(s)-\mu(s)-X(t)+\mu(t)\}\\
&=F(t).
\end{aligned}
$$

若 $t>s$,类似可得 $C_X(t,s)=F(s)$,故

$$C_X(t,s)=F[\min(s,t)].$$

(2) 对泊松过程 $X(t)$,$E[X(t)]=\lambda t$,$E[X^2(t)]=\lambda t+(\lambda t)^2$,故 $F(t)=\lambda t$.

由题(1)得 $\qquad C_X(t,s)=\lambda\min\{t,s\}$.

例 10 设 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 是两个参数分别为 λ_1 与 λ_2 的泊松过程,证明:$X(t)=X_1(t)+X_2(t)$ 是参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松过程,$X(t)=X_1(t)-X_2(t)$ 不是泊松过程.

证 因为

$$\varphi_{X_1}(v)=E[e^{jvX_1(t)}]=\exp\{\lambda_1 t(e^{jv}-1)\},$$

$$\varphi_{X_2}(v)=E[e^{jvX_2(t)}]=\exp\{\lambda_2 t(e^{jv}-1)\},$$

而 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 相互独立,所以

$$\varphi_X(v)=\varphi_{X_1}(v)\varphi_{X_2}(v)=\exp\{(\lambda_1+\lambda_2)t(e^{jv}-1)\},$$

从而知 $X(t)$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布.

对于 $X(t)=X_1(t)-X_2(t)$,有

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(v)&=E[e^{jvX(t)}]=E[e^{jv[X_1(t)-X_2(t)]}]\\
&=E[e^{jvX_1(t)}]E[e^{-jvX_2(t)}]=\varphi_{X_1}(v)\varphi_{X_2}(-v)
\end{aligned}
$$

$$= \exp\{\lambda_1 t(e^{jv}-1)\}\exp\{\lambda_2 t(e^{-jv}-1)\}$$
$$= \exp\{\lambda_1 t e^{jv} + \lambda_2 t e^{-jv} - (\lambda_1+\lambda_2)t\}.$$

故 $\varphi_X(v)$不是泊松过程的特征函数，即 $X(t)$不是泊松过程.

第二节　与泊松过程有关的若干分布

主要内容

1. 设 $N(t)$表示在$[0,t)$内事件发生的次数，$X_n(n\geqslant 1)$表示第 $n-1$ 次事件发生到第 n 次事件发生的时间间隔，则$\{X_n,n\geqslant 1\}$称为**到达时间间隔序列**.

若$\{N(t),t\geqslant 0\}$是泊松过程，则$\{X_n,n\geqslant 1\}$是相互独立且服从参数为 λ 的指数分布的随机变量序列.

2. 以 T_n 记第 n 次事件发生的时刻，则

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i(n \geqslant 1)(T_0 = 0),$$

且 $$F_{T_n}(t) = 1 - F_{N(t)}(k-1),\ k = 1,2,\cdots.$$

对$\{N(t),t\geqslant 0\}$，$F_{T_n}(t)=1-e^{-\lambda t}\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!}$，及 $f_{T_n}(t)=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$，称服从 Γ 分布.

有 $$E[T_n]=n/\lambda,\quad D[T_n]=n/\lambda^2,$$

且 $$E[T_n]=nE[X_n],$$

特征函数 $$\varphi_{T_n}(v)=\frac{\lambda^n}{(\lambda-jv)^n}.$$

3. 设$\{N(t),t\geqslant 0\}$是一泊松过程，又设 $N(t)=n$，则事件发生的 n 个时刻 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 的联合分布密度是

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n) = n!/t^n,\quad 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n.$$

疑难解析

1. 为什么强度为 λ 的泊松过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 的到达时间间隔 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是参数为 λ 的指数分布的独立随机变量序列?

答　因为事件 $\{X_1>t\}$ 等价于 $\{N(t)=0\}$,故

$$P\{X_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

或

$$P\{X_1 \leqslant t\} = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

所以 X_1 服从参数为 λ 的指数分布. 而

$$\begin{aligned} & P\{X_2>t \mid X_1=s\} \\ & =P\{(s,s+t)\text{内无事件发生} \mid X_1=s\}\ (\text{独立性}) \\ & =P\{(s,s+t)\text{内无事件发生}\}\ (\text{平稳性}) \\ & =P\{N(t)=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

故 X_1 与 X_2 相互独立,依次递推证出.

事实上,由于泊松过程具有独立增量,所以各个事件的发生是独立的. 而泊松过程又具有平稳增量,故此时间间隔与上一段时间间隔的分布应该相同,即有“无记忆性”. 具有无记忆性的连续分布只有指数分布.

2. 设顾客按强度为 λ 的泊松过程到达,$N(t)$ 表示在 $(0,t)$ 中到达的第 i 类顾客 $(i=1,2)$. 设时刻 s 到达的顾客与其它顾客是独立的. 属于第 1 类的概率为 $P(s)$,属于第 2 类的概率为 $P(1-s)$. 问 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 各是什么分布的随机变量.

答　$N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 相互独立,分别是均值为 λtp 和 $\lambda t(1-p)$ 的泊松分布,$p = \frac{1}{t}\int_0^t P(s)\mathrm{d}s$.

因为时刻 s 服从 $(0,t)$ 上的均匀分布,故将条件加到时间 s 上,有 $p=P\{\text{到达的顾客是第 1 类的}\} = \frac{1}{t}\int_0^t P(s)\mathrm{d}s$.

由事件的独立性知，$P\{N_1(t)=n,N_2(t)=m|N(t)=m+n\}$恰为$n+m$重贝努利试验中第1类顾客出现$n$次的概率，等于$C_{n+m}^{n}p^n(1-p)^m$，故

$$\begin{aligned}
&P\{N_1(t)=n,N_2(t)=m\}\\
&=P\{N_1(t)=n,N_2(t)=m\mid N(t)=n+m\}\\
&\quad\cdot P\{N(t)=n+m\}\\
&=C_{m+n}^{n}p^n(1-p)^m e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}\\
&=e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda t(1-p)}\frac{[\lambda t(1-p)]^m}{m!}.
\end{aligned}$$

方法、技巧与典型例题分析

例1 设顾客到某商场的过程是泊松过程，已知平均每小时有30人到达，求下列事件的概率：两个顾客相继到达的时间间隔(1)超过2 min；(2)短于4 min；(3)在1 min到3 min之间.

解 由题意，顾客到达数$N(t)$是强度为λ的泊松过程，则顾客到达的时间间隔$\{X_n,n\geqslant 1\}$服从参数为λ的指数分布，$f_X(x)=30e^{-30x}$，$x\geqslant 0$，故

(1) $P\{X>2/60\}=\int_{2/60}^{\infty}30e^{-30x}dx=0.368$；

(2) $P\{X<4/60\}=\int_{0}^{4/60}30e^{-30x}dx=0.865$；

(3) $P\{1/60\leqslant X\leqslant 3/60\}=\int_{1/60}^{3/60}e^{-30x}dx=0.384$.

例2 设顾客以每分钟2人的速率到达，顾客流为泊松流，求在2 min内到达的顾客不超过3人的概率.

解 设$\{N(t),t\geqslant 0\}$是顾客到达数的泊松过程，$\lambda=2$，故

$$P\{N(2)=k\}=\frac{(4)^k}{k!}e^{-4},$$

则 $$P\{N(2)\leqslant 3\}$$
$$= P\{N(2)=0\}+P\{N(2)=1\}+P\{N(2)=2\}$$
$$+P\{N(2)=3\}$$
$$= e^{-4}+4e^{-4}+8e^{-4}+\frac{32}{3}e^{-4}=\frac{71}{3}e^{-4}.$$

例 3 设一部件受到随机出现的冲击，即在$\{0,t\}$内出现的冲击次数 $N(t)$是强度为 λ 的泊松过程. 设第 i 次冲击的损坏是随机变量 D_i，$i=1,2,\cdots$，D_i 独立同分布且与$\{N(t),t\geqslant 0\}$独立. 又设一次冲击的初始值为 D，t 以后的损坏为 $De^{-\alpha t}$，$\alpha>0$ 为常数. 假定损坏是可叠加的，则从开始到 t 为止的总损坏 $D(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}D_ie^{-\alpha(t-s_i)}$，其中 s_i 表示第 i 次冲击的到达时间. 求 $E[D(t)]$.

解 因为
$$E[D(t)\mid N(t)=n]$$
$$=E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)}D_ie^{-\alpha(t-s_i)}\mid N(t)=n\Big]$$
$$=E\Big[\sum_{i=1}^{n}D_ie^{-\alpha(t-s_i)}\mid N(t)=n\Big]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\{E[D_i\mid N(t)=n]E[e^{-\alpha(t-s_i)}\mid N(t)=n\}$$
$$=E[D_1]e^{-\alpha t}E\Big[\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha s_i}\mid N(t)=n\Big],$$
令 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 为相互独立的、在$[0,t]$上的服从均匀分布的随机变量，则依命题(主要内容 3)有
$$E\Big[\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha s_i}\Big|N(t)=n\Big]$$
$$=E\Big[\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha U_i}\Big]=E\Big[\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha v_i}\Big]=nE[e^{\alpha v_i}]$$
$$=n\cdot\frac{1}{t}\int_0^t e^{\alpha x}dx=\frac{n}{\alpha t}(e^{\alpha t}-1).$$

故 $$E[D(t)\mid N(t)=n]$$
$$=E[D_1]e^{-\alpha t}\frac{n}{\alpha t}(e^{\alpha t}-1)=\frac{n}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})E[D_1].$$
对上式两边求数学期望，得
$$E[D(t)]=\frac{E[N(t)]}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})E[D_1]$$
$$=\frac{\lambda E[D_1]}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}).$$

例 4 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ $(t\geqslant 0)$ 是强度分别为 λ_X 和 λ_Y 的泊松过程，证明：在 $X(t)$ 的任意两个相邻事件之间的时间间隔内，$Y(t)$ 恰好有 k 个事件发生的概率为
$$p=\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\left(\frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^k,\quad k=0,1,2,\cdots.$$

证 设 $X(t)$ 的两个相邻事件的时间间隔为 τ，依独立性，有
$$P\{[Y(t+\tau)-Y(t)]=k\}=\frac{(\lambda_Y\tau)^k}{k!}e^{-\lambda_Y\tau},$$
而 $X(t)$ 的不同到达时刻的概率密度函数为
$$f_X(\tau)=\begin{cases}\lambda_X e^{-\lambda_X\tau}, & \tau\geqslant 0\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$
由于 $X(t)$ 是泊松过程，故 $Y(t)$ 恰好有 k 个事件发生的概率为
$$p=\int_0^{\infty}\frac{(\lambda_Y\tau)^k}{k!}e^{-\lambda_Y\tau}\cdot\lambda_X e^{-\lambda_X\tau}d\tau$$
$$=\frac{\lambda_X\lambda_Y^k}{k!}\int_0^{\infty}\tau^k e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}d\tau=\frac{\lambda_X\lambda_Y^k}{k!}\cdot\frac{k!}{(\lambda_X+\lambda_Y)^{k+1}}.$$
$$=\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\cdot\left(\frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^k.$$

例 5 设独立同分布的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的分布函数为
$$P\{X_i\leqslant x\}=1-e^{-\lambda x},\quad x\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n,$$
又设 $Y_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$，Y_n 的概率密度函数为 $f(y)$，证明：
$$f_Y(y)=e^{-\lambda y}\frac{\lambda^n y^{n-1}}{(n-1)!}.$$

证 由 X_i 的分布函数，得 X_i 的概率密度为

$$f_{X_i}(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n,$$

故 X_i 的特征函数为

$$\varphi_{X_i}(v)=\frac{\lambda}{\lambda-\mathrm{j}v}.$$

所以，Y_n 的特征函数为

$$\varphi_{Y_n}(v)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(v)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-\mathrm{j}v}\right)^n.$$

于是
$$f_Y(y)=e^{-\lambda y}\frac{\lambda^n y^{n-1}}{(n-1)!}.$$

例 6 设乘客按强度为 λ 的泊松过程来到某火车站，火车在时刻 t 启程，计算在时间 $(0,t)$ 内到达的乘客候车时间总和的期望值，即求 $E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\right]$，其中 T_i 是第 i 个乘客到达的时刻.

解 对 $N(t)$ 取条件 n，则

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\mid N(t)=n\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}(t-T_i)\mid N(t)=n\right]$$
$$=nt-E\left[\sum_{i=1}^{n}T_i\mid N(t)=n\right],$$

以 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 记 n 个相互独立的在 $(0,1)$ 上服从均匀分布的随机变量，则

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}T_i\mid N(t)=n\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}U_i\right]=\frac{nt}{2}.$$

故
$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-T_i)\mid N(t)=n\right]=nt-\frac{nt}{2}=\frac{nt}{2}.$$

从而
$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t_i-T_i)\right]$$
$$=E\left\{E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\mid N(t)=n\right]\right\}$$

$$= \frac{t}{2}E[N(t)] = \frac{\lambda t^2}{2}.$$

例 7 某机构从上午 8 时开始有无穷多人排队等候服务. 设只有一名工作人员,每人接受服务的时间是独立的且服从均值为 20 min 的指数分布. 问:到中午 12 时,平均有多少人离去? 有 9 人接受服务的概率是多少?

解 离去人数 $N(t)$是强度为 3(以小时计)的泊松过程. 若以 8 时为零时刻,则到 12 时离去的人数平均是 12 名,得

$$P\{N(4) - N(0) = n\} = e^{-12} \frac{(12)^n}{n!}.$$

而有 9 人接受服务的概率为

$$P\{N(4) = 9\} = e^{-12} \frac{(12)^9}{9!}.$$

例 8 在上节例 1 中,设顾客购物在时刻 s 发生,则其概率为 $P(s)$,仍以 $Y(t)$表示$(0,t)$内购买货物的顾客数,问 $Y(t)$是否为泊松过程,并求出 $Y(t)$的分布.

解 虽然 $Y(t)$仍是独立增量过程,但由于 $P(s)$随 s 变化,已不再是平稳增量过程,故不是泊松过程.

下面来证明,$\forall t$,$Y(t)$仍是泊松分布,只是参数与 t 和 $P(s)$有关. 若对 $N(t)$取条件

$$\begin{aligned} &P\{Y(t) = k\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{Y(t) = k \mid N(t) = n+k\} P\{N(t) = n+k\}, \end{aligned}$$

由疑难解析 2 知

$$p = \int_0^t \frac{1}{t} P(s) ds = \frac{1}{t}\int_0^t P(s) ds.$$

而

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} P\{Y(t) = k \mid N(t) = n+k\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^{k} p^k (1-p)^n \frac{(\lambda t)^{n+k}}{(n+k)!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!k!} p^k (1-p)^n \frac{(\lambda t)^{n+k}}{(n+k)!} \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

$$= \frac{(\lambda t p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n}{n!} (\lambda t)^n \mathrm{e}^{-\lambda(1-p)t}$$

$$= \frac{(\lambda t p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda p t},$$

故 $$P\{Y(t)=k\} = \frac{(\lambda t p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda p t}, \quad p = \frac{1}{t}\int_0^t P(s)\mathrm{d}s,$$

即 $Y(t)$仍为泊松分布，参数与 t 和 $P(s)$有关.

例 9 乘客依强度为 λ_A 的泊松过程到达飞机 A（从 $t=0$ 开始），当飞机有 N_A 个乘客时就起飞，与其独立的是乘客依强度为 λ_B 的泊松过程到达飞机 B（从 $t=0$ 开始），当飞机有 N_B 个乘客时起飞.

(1) 写出飞机 A 在飞机 B 之后起飞的概率式；

(2) 对 $N_A=N_B$ 和 $\lambda_A=\lambda_B$ 的情形计算题(1)的概率.

解 (1) 以 T_A 记飞机 A 的第 N_A 个乘客到达的时刻，T_B 记飞机 B 的第 N_B 个乘客到达的时刻，则飞机 A 在飞机 B 之后起飞的概率为 $P\{T_A>T_B\}$. 对泊松过程 $X(t)$，到达时间的概率密度函数为

$$f_{X_k}(t) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

故 $$f_{T_A}(t) = \begin{cases} \lambda_A \mathrm{e}^{-\lambda_A t} \dfrac{(\lambda_A t)^{N_A-1}}{(N_A-1)!}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

$$f_{T_B}(t) = \begin{cases} \lambda_B \mathrm{e}^{-\lambda_B t} \dfrac{(\lambda_B t)^{N_B-1}}{(N_B-1)!}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

依独立性，得

$$P\{T_A > T_B\} = \int_0^{\infty} f_{T_B}(t_B)\mathrm{d}t_B \int_{t_B}^{\infty} f_{T_A}(t_A)\mathrm{d}t_A$$

$$= \int_0^{\infty}\int_{t_B}^{\infty} \lambda_A\lambda_B \mathrm{e}^{-(\lambda_A+\lambda_B)} \frac{(\lambda_A t)^{N_A-1}(\lambda_B t)^{N_B-1}}{(N_A-1)!(N_B-1)!}\mathrm{d}t_A\mathrm{d}t_B.$$

(2) 若 $f_{T_A}(t)=f_{T_B}(t)$，则依对称性，应有

$$P\{T_A > T_B\} = 1/2.$$

例 10 $M/G/\infty$表示一个随机服务系统，M 表示顾客到达是强度为λ 的泊松过程；G 表示服务时间 Y 是独立同分布的随机变量，分布函数是 $G(t)$；∞表示服务员人数，说明顾客到达后无需等待. 计算服务系统的效率.

解 计算服务系统的效率，即计算到时刻 t 已服务完的顾客数与未服务完顾客数的联合分布. 以 $N_1(t)$记到时刻 t 已服务完的顾客数，$N_2(t)$记到时刻 t 未服务完的顾客数. 设顾客在时刻 s 到达，$s\leqslant t$，则到时刻 t 已服务完，即服务时间 $Y\leqslant t-s$，所以概率为 $G(t-s)$，即 $P(s)$（见本节疑难解析 2）. 于是

$$E[N_1(t)] = \lambda tp = \lambda\int_0^t G(t-s)\mathrm{d}s = \lambda\int_0^t G(y)\mathrm{d}y,$$

$$E[N_2(t)] = \lambda t(1-p) = \lambda\int_0^t [1-G(y)]\mathrm{d}y$$

$$= \lambda t - \lambda\int_0^t G(y)\mathrm{d}y.$$

例 11 设$\{N(t),t\geqslant 0\}$是强度为 λ 的泊松过程，$p_{ij}\{s,s+t\}=P\{N(s+t)=j\,|\,N(s)=i\}$，$t\geqslant 0$，$i,j=0,1,2,\cdots$，求

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{ij}(s,s+t)-p_{ij}(s,s)}{t}\ (s\geqslant 0,\ i,j\geqslant 0).$$

解 $p_{ij}(s,s+t)-p_{ij}(s,s)$

$$=P\{N(s+t)=j\,|\,N(t)=i\}-P\{N(s)=j\,|\,N(s)=i\}$$

$$=\frac{P\{N(s+t)=j,N(s)=i\}}{P\{N(s)=i\}}-\delta_{ij}$$

$$=\frac{P\{N(s+t)-N(s)=j-i,N(s)=i\}}{P\{N(s)=i\}}-\delta_{ij}$$

$$=P\{N(s+t)-N(s)=j-i\}-\delta_{ij}=P\{N(t)=j-i\}-\delta_{ij}$$

$$=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}-\delta_{ij}, & j\geqslant i,\\ 0, & j<i.\end{cases}$$

当 $i=j$ 时，有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{ij}(s,s+t)-p_{ij}(s,s)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}-1}{t}\xlongequal{\text{L}'}-\lambda;$$

当 $j\geqslant i+1$ 时，有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{ij}(s,s+t)-p_{ij}(s,s)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}t^{j-i-1}$$

$$=\begin{cases}\lambda, & j=i+1,\\ 0, & j>i+1.\end{cases}$$

综上所述，有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{ij}(s,s+t)-p_{ij}(s,s)}{t}=\begin{cases}-\lambda, & j=i,\\ \lambda, & j=i+1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

第三节　非齐次泊松过程

主要内容

1. 若计数过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 满足以下条件：

(1) 零初值性，$N(0)=0$，

(2) $N(t)$ 是独立增量过程，

(3) $P\{[N(t+h)-N(t)]=1\}=\lambda(t)h+o(h)$，

(4) $P\{[N(t+h)-N(t)]\geqslant 2\}=o(h)$，

则称 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是强度为 $\lambda(t)>0(t\geqslant 0)$ 的**非齐次泊松过程**.

2. 上述条件(3)、(4)与下述条件等价：

$\forall t,s\in\mathbf{R},t\geqslant 0,s\geqslant 0,N(t+s)-N(t)$ 为具有参数 $\mu(t+s)-\mu(t)=\int_t^{t+s}\lambda(u)\mathrm{d}u$ 的泊松分布.

$\mu(t)$称为非齐次泊松过程的均值函数.

3. 若$\{N(t),t\geqslant 0\}$为非齐次泊松过程,则

$$P\{N(t_0+t)-N(t_0)=k\}$$
$$=\frac{[\mu(t_0+t)-\mu(t_0)]^k}{k!}\exp\{-[\mu(t_0+t)-\mu(t_0)]\},$$

其中

$$\mu(t)=\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u,$$

$$E[N(t)]=\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u,\quad D[N(t)]=\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u.$$

4. **定理** 设$\{N(t),t\geqslant 0\}$是一个强度为 $\lambda(t)$的非齐次泊松过程,$\forall t\geqslant 0$,令 $N^*(t)=N[\mu^{-1}(t)]$,则$\{N^*(t),t\geqslant 0\}$**是强度为** 1 **的泊松过程.**

疑难解析

非齐次泊松过程与泊松过程有何不同,又有何联系?

答 非齐次泊松过程与泊松过程的不同是:强度 λ 不再是常数,而与 t 有关,也就是说不具有平稳增量性.它反映了一类其变化与时间有关的过程,如设备的故障率与使用年限有关,放射性物质的衰变速度与衰变时间有关,等等.

利用定理(主要内容 4)可将非齐次泊松过程问题转化到泊松过程中进行讨论.反过来,也可以由强度为 λ 的泊松过程构造出一个强度函数为 $\lambda(t)$的非齐次泊松过程.

方法、技巧与典型例题分析

本节的重点是掌握非齐次泊松过程的特点,了解非齐次泊松

过程与泊松过程的联系，熟练地将非齐次泊松过程转化为一般泊松过程.

例 1 设有非齐次泊松过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$，$\lambda(t)=\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)$，求 $E[N(t)]$和 $D[N(t)]$.

解 因为 $N(t)$的特征函数

$$\varphi_{N(t)}(v)=\exp\{-(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}v})\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u\},$$

所以，$N(t)$的数学期望为

$$\begin{aligned}E[N(t)]&=(-j)\frac{\mathrm{d}\varphi_{N(t)}(v)}{\mathrm{d}v}\bigg|_{v=0}\\&=\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u=\int_0^t\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin\omega t}{\omega}\right),\quad\omega\neq 0.\end{aligned}$$

而

$$E[N^2(t)]=-\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{N(t)}(v)}{\mathrm{d}v^2}\bigg|_{v=0}=\left[\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u\right]^2+\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u,$$

于是

$$\begin{aligned}D[N(t)]&=E[N^2(t)]-\{E[N(t)]\}^2\\&=\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin\omega t}{\omega}\right),\quad\omega\neq 0.\end{aligned}$$

实际上，为简便起见，可以直接用以下公式(见主要内容 3)计算：

$$E[N(t)]=\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u,D[N(t)]=\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u.$$

例 2 设某设备的使用期限为 10 年，在前 5 年内平均 2.5 年需要维修一次，后 5 年平均 2 年需维修一次，求在使用期限内只维修过 1 次的概率.

解 因为维修次数与使用时间有关，所以该过程是非齐次泊松过程，强度函数

$$\lambda(t)=\begin{cases}1/2.5, & 0\leqslant t\leqslant 5,\\ 1/2, & 5<t\leqslant 10.\end{cases}$$

则 $$\mu(10)=\int_0^{10}\lambda(t)\mathrm{d}t=\int_0^5\frac{1}{2.5}\mathrm{d}t+\int_5^{10}\frac{1}{2}\mathrm{d}t=4.5,$$

$$P\{N(10)-N(0)=1\}=\mathrm{e}^{-4.5}\frac{(4.5)}{1!}=\frac{9}{2}\mathrm{e}^{-9/2}.$$

例 3 某小商店上午 8 时开始营业，从 8 时到 11 时平均顾客到达率线性增加. 从 8 时开始顾客平均到达率为 5 人/h，11 时到达率达高峰，为 20 人/h，从 11 时至下午 1 时到达率不变，从下午 1 时至 5 时顾客到达率线性下降，到下午 5 时顾客到达率为 12 人/h. 设在不相重叠的时间间隔内到达的顾客数是相互独立的. 求在上午 8 时半至 9 时半无顾客到达的概率和该段时间内到达顾客的数学期望.

解 因为顾客到达率与时间有关，所以顾客到达过程是一非齐次泊松过程.

设上午 8 时为 $t=0$，则 11 时为 $t=3$，下午 1 时为 $t=5$，下午 5 时为 $t=9$. 次日 8 时从 9 重新开始，故可得一周期为 9 的曲线. 按曲线写出顾客到达率 $\lambda(t)$ 的关系式如下：

$$\lambda(t)=\begin{cases}5+5t, & 0\leqslant t\leqslant 3,\\ 20, & 3<t\leqslant 5,\\ 20-2(t-5), & 5<t\leqslant 9,\end{cases}$$

且 $$\lambda(t)=\lambda(t-9).$$

因为 $$\mu\left(\frac{3}{2}\right)-\mu\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{1/2}^{3/2}\lambda(t)\mathrm{d}t=\int_{1/2}^{3/2}(5+5t)\mathrm{d}t$$

$$=5\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=10.$$

所以，在 8 时半至 9 时半无顾客到达的概率为

$$\mathrm{e}^{-[\mu(3/2)-\mu(1/2)]}=\mathrm{e}^{-10};$$

在 8 时半至 9 时半到达顾客数的数学期望值为

$$\left[\mu\left(\frac{3}{2}\right)-\mu\left(\frac{1}{2}\right)\right]=10\text{（人）}.$$

例 4 证明上节例 10 中，在$[0,t]$内接受服务后离开服务台的顾客数$\{N_1(t),t\geqslant0\}$是一非齐次泊松过程.

证 设在时刻 y 到达的顾客在$(s,s+t)$内离开服务台的为第 1 类顾客，故在时刻 y 到达的顾客是第 1 类的概率为

$$P(y)=\begin{cases}G(s+t-y)-G(s-y), & y<s,\\ G(s+t-y), & s<y<s+t,\\ 0, & y>s+t.\end{cases}$$

所以 $N_1(t+s)-N_1(s)$是服从泊松分布的随机变量（见上节疑难解析 2），其均值为

$$\begin{aligned}&\lambda\int_0^{\infty}P(y)\mathrm{d}y\\ &=\lambda\int_0^{s}[G(s+t-y)-G(s-y)]\mathrm{d}y+\lambda\int_s^{s+t}G(s+t-y)\mathrm{d}y\\ &=\lambda\int_s^{s+t}G(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

再令 I_1 和 I_2 为两个不相交的时间区间，在 I_1 内离开的顾客为第 1 类顾客，在 I_2 内离开的为第 2 类顾客，两者相互独立. 由上面的结论及 $N_1(0)=0$ 知，$N_1(t)$为非齐次泊松过程. 但当 $t\to\infty$ 时，比较 $P\{N(t+s)-N(t)=k\}$（见主要内容 3）与上面的均值式知，$N_1(t)$的强度函数 $\lambda(t)=\lambda G(t)\to\lambda\ (t\to\infty)$，故离开的顾客数近似于强度为 λ 的齐次泊松过程.

第四节　复合泊松过程

主要内容

1. 设$\{N(t),t\geqslant0\}$是一个强度为 λ 的泊松过程，$\{Y_n,n\geqslant1\}$是

一列独立同分布的随机变量，且$\{N(t)\}$与$\{Y_n\}$相互独立，令

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i,\ t\geqslant 0,$$

则称$\{X(t),t\geqslant 0\}$为**复合泊松过程**.

$\{X(t),t\geqslant 0\}$有独立增量和平稳增量.

2. 若 Y_1 的特征函数为 $\varphi(u)=E[e^{juY_1}]$，则 $X(t)$的特征函数为 $\varphi_{X(t)}(u)=E[e^{juX(t)}]=e^{\lambda t[\varphi(u)-1]}$.

3. 若 $E[|\xi|]<\infty$，则 $E[X(t)]=\lambda tE[Y_1]$.

若 $$E[|Y_1|^2]<\infty,$$

则 $$E[X^2(t)]=(\lambda t)^2(E[Y_1])^2+\lambda tE[Y_1^2],$$

$$D[X(t)]=\lambda tE[Y_1^2].$$

疑 难 解 析

复合泊松过程与泊松过程有什么不同？

答 复合泊松过程是一列随机变量$\{Y_n\}$的和构成的. 当 $Y_n\equiv 1$ 时，$X(t)=N(t)$，$X(t)$即为通常的泊松过程.

复合泊松过程除了处理定义中的问题外，还能处理另一类问题：如有一泊松过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$，其强度为 λ. 若过程中出现的事件能以不同性质分为互不相容的 A_1 型与 A_2 型事件，且当事件发生时，出现 A_1 型的概率为 p，出现 A_2 型的概率为 $q=1-p$. 出现 A 和出现 A_2 相互独立，得到两个计数过程$\{N_1(t),t\geqslant 0\}$和

$N_1(t)+N_2(t)=N(t)$. 如果用 $\eta=1$ 表示出现

$N_1(t)=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_{N(t)}$，是随机个随

泊松分布，它的母函数为 $G_{N(t)}(s)=$

数为 $F_\eta(s)=ps+q$，故 $N_1(t)$的

$N_1(t),t\geqslant 0\}$是强度为 λp

程.

方法、技巧与典型例题分析

关于复合泊松过程的构成，首先要存在一个泊松过程和一个随机变量序列，然后验证随机变量序列的独立性以及随机变量序列与泊松过程的独立性. 在满足条件时，才能进行分析与计算.

例 1 举出几个复合泊松过程的实例.

解 (1) 顾客到达某服务系统的时刻 $s_1, s_2, \cdots$ 形成一个强度为 λ 的泊松过程，若以 $Y_n(n\geqslant 1)$ 记在时刻 $s_n(n\geqslant 1)$ 同时到达的顾客人数，则在时间 $[0,t]$ 内到达的顾客总人数是复合泊松过程.

(2) 到达某汽车总站的客车数 s 是一泊松过程，每辆客车内乘客数是一随机变量. 设各客车内乘客数独立同分布，且各辆车乘客数与车辆数 $N(t)$ 相互独立，则在 $[0,t]$ 内到达汽车总站的乘客总数是复合泊松过程.

(3) 保险公司接到索赔的次数是一泊松过程，每次索赔的金额是一列独立同分布的随机变量. 显然索赔的金额与发生的时刻无关，则在 $[0,t]$ 内的索赔总金额是复合泊松过程.

例 2 在保险的索赔模型中，设索赔要求以平均 2 次/月的速率的泊松过程到达保险公司. 若每次赔付金额是均值为 10 000 元的正态分布，求一年中保险公司的平均赔付金额.

解 这是一个复合泊松过程，$\lambda=2, t=12, E[Y_1]=10\,000$，故

$$E[X(12)] = 2\cdot 12\cdot 10\,000 = 240\,000\ (\text{元}).$$

例 3 设移民到某地定居的户数是一泊松过程，平均每周有 2 户定居. 设每户的人口数是一随机变量，一户有 4 人的概率是1/6，有 3 人的概率是 1/3，有 2 人的概率是 1/3，有 1 人的概率是1/6. 求在五周内到该地定居的移民人数的数学期望与方差.

解 以 Y_i 记第 i 户人口数，则移民总人数 $X(t)=\sum\limits_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 是一复合泊松过程. 依题意知 $\lambda = 2, t = 5$，而

$$E[Y_1]=4\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{2},$$

$$E[Y_1^2]=4^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{43}{6},$$

故
$$E[X(5)]=2\cdot5\cdot\frac{5}{2}=25,$$

$$D[X(5)]=2\cdot5\cdot\frac{43}{6}=\frac{215}{3}.$$

注意 有的教科书不用 $E[Y_1]$ 而用 $E[Y_n]$，其实二者是一样的. 这里的 $E[Y_1]$ 与 $E[Y_n]$ 都反映 Y_i 取值的平均值，并无第 i 个值的概念.

例 4 某刊物邮购部的顾客数是平均速率为 6 的泊松过程，订阅 1 年、2 年或 3 年的概率分别为 1/2、1/3 和 1/6，且相互独立. 设订一年时，可得 1 元手续费. 以 $X(t)$ 记在 $[0,t]$ 内得到的总手续费，求 $E[X(t)]$ 与 $\text{var}[X(t)]$.

解 因为顾客数是 $\lambda=6$ 的泊松过程，t 是变数，而

$$E[Y_1]=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{10}{6},$$

$$E[Y_1^2]=1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{20}{6},$$

故
$$E[X(t)]=6\cdot t\cdot\frac{10}{6}=10t\ (\text{元}),$$

$$\text{var}[X(t)]=6\cdot t\cdot\frac{20}{6}=20t\ (\text{元}).$$

所以，数学期望与方差都是 t 的函数.

例 5 设 $\{X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i,t\geqslant0\}$ 是复合泊松过程，已知 $\lambda=5$，求 $E[X(t)]$，$D[X(t)]$ 与特征函数 $\varphi_X(v)$. 其中 Y_i 服从下列分布：

(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1\,000}, & 1\,000\leqslant x\leqslant 2\,000,\\ 0, & \text{其它};\end{cases}$

(2) $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\mu x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

解 (1) Y_i 服从均匀分布，有

$$E[Y_1]=\int_{1000}^{2000}x\frac{1}{1000}\mathrm{d}x=1500,$$

$$E[Y_1^2]=\int_{1000}^{2000}x^2\frac{1}{1000}\mathrm{d}x=\frac{7}{3}\times 10^6,$$

$$\varphi_{Y_i}(v)=\int_{1000}^{2000}e^{\mathrm{j}vx}\frac{1}{1000}\mathrm{d}x=\frac{e^{\mathrm{j}1000v}}{1000v}\sin(1000v),$$

故 $$E[X(t)]=5\cdot t\cdot 1500=7500t,$$

$$D[X(t)]=5\cdot t\cdot\frac{7}{3}\times 10^6=\frac{35}{3}\times 10^6 t;$$

$$\varphi_X(v)=\exp\left\{\frac{\sin(1000v)}{200v}e^{\mathrm{j}1000v}t-5t\right\}.$$

(2) Y_i 服从指数分布，有

$$E[Y_1]=\frac{1}{\mu},\quad E[Y_1^2]=\frac{2}{\mu^2},\quad \varphi_{Y_i}(v)=\frac{\mu}{\mu-\mathrm{j}v},$$

故 $$E[X(t)]=\frac{5t}{\mu},\quad \mathrm{var}[X(t)]=\frac{10t}{\mu^2},$$

$$\varphi_X(v)=\exp\left\{\frac{\mathrm{j}5vt}{\mu-\mathrm{j}v}\right\}.$$

例 6 设 $N(t)$为泊松过程，构造随机过程

$$X(0)=0,\quad X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i,$$

其中$\{Y_i\}$为独立同分布的一列随机变量，且与 $N(t)$相互独立. 已知 Y_i 的特征函数为 $\varphi_Y(v)$，求：

(1) $X(t)$的一阶特征函数 $\varphi_X(v)$；

(2) $E[X(t)]$，$E[X^2(t)]$和 $\mathrm{var}[X(t)]$.

解 (1) 由于 $E[X]=E\{E[X|N]\}$，依特征函数定义，有

$$\varphi_X(v)=E[e^{\mathrm{j}vX(t)}]=E\{E[e^{\mathrm{j}vX(t)}\mid N(t)=k]\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} E\{e^{jvX(t)} \mid N(t) = k\} P\{N(t) = k\},$$

其中 $$E\{e^{jvX(t)} \mid X(t) = k\}$$

$$= E[\exp\{\sum_{i=1}^{k} Y_i\}] = \prod_{i=1}^{k} E[e^{jvY_i}] = [\varphi_Y(v)]^k,$$

$$P\{X(t) = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

故 $$\varphi_X(v) = \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi_Y(v)]^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [\varphi_Y(v) \lambda t]^k$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot e^{\varphi_Y(v) \lambda t} = e^{\lambda t[\varphi_Y(v)-1]}.$$

(2) 由特征函数与矩的关系,数学期望为

$$E[X(t)] = -j \frac{d\varphi_X(v)}{dv}\bigg|_{v=0} = -j\lambda t \cdot \frac{d\varphi_Y(v)}{dv} e^{\lambda t[\varphi_Y(v)-1]} \Big|_{v=0}.$$

因为 $$-j \frac{d\varphi_Y(v)}{dv}\bigg|_{v=0} = E[Y_1], \quad \varphi_Y(0) = 1,$$

故 $$E[X(t)] = \lambda t E[Y_1],$$

均方值为

$$E[X^2(t)]$$

$$= -\frac{d^2\varphi_X(v)}{dv^2}\bigg|_{v=0}$$

$$= -\left\{\left[\lambda t \frac{d\varphi_Y(v)}{dv}\right]^2 e^{\lambda t[\varphi_Y(v)-1]} + \lambda t \frac{d^2\varphi_Y(v)}{dv^2} e^{\lambda t[\varphi_Y(v)-1]}\right\}\bigg|_{v=0}$$

$$= (\lambda t)^2 E^2[Y] + \lambda t E[Y^2],$$

故 $$\mathrm{var}[X(t)] = E^2[X(t)] + \lambda t E[X^2(t)] = \lambda t E[Y_1^2].$$

上式即关于复合泊松过程的特征函数、数学期望与方差的公式.

例 7 设进入中国上空流星的个数是一泊松过程,平均每年为 10 000 个. 每个流星能以陨石落于地面的概率为 0. 000 1,求一个月内落于中国地面陨石数 W 的 $E[W]$, $\mathrm{var}[W]$ 和 $P\{W \geqslant 2\}$.

解 这是一个复合泊松过程,设 X_t 是 t 年进入中国上空的流

星数，则

$$P\{X_t=k\}=e^{-10\,000t}(10\,000t)^k/k! \quad (k\geqslant 0),$$

$$P\{W=j \mid X_{t_0}=k\}$$

$$=C_k^j(0.000\,1)^j(0.999\,9)^{k-j} \quad (t_0=1/12),$$

依条件期望计算公式，有

$$E[W]=\sum_{k=0}^{\infty}E[W \mid X_{t_0}=k]P\{X_{t_0}=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}jP\{W=j \mid X_{t_0}=k\}P\{X_{t_0}=k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}jP\{W=j \mid X_{t_0}=k\}P\{X_{t_0}=k\}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}j\sum_{k=j}^{\infty}C_k^j(0.000\,1)^j(0.999\,9)^{k-j}e^{-10^4/12}\left(\frac{10^4}{12}\right)^k\Big/k!$$

$$=e^{-10^4/12}\sum_{j=1}^{\infty}j10^{4j}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{9\,999}{10^4}\right)^iC_{j+i}^i\left(\frac{10^4}{12}\right)^{i+j}\Big/(i+j)!$$

$$=e^{-10^4/12}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^j\frac{1}{(j-t)!}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{9\,999}{12}\right)^i\frac{1}{i!}$$

$$=e^{-1/12}\frac{1}{12}e^{1/12}=\frac{1}{12},$$

$$E[W^2]=e^{-1/12}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{12}\right)\frac{i}{(i-1)!}=e^{-1/12}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^{i+1}\frac{i+1}{i!}$$

$$=\frac{1}{12}e^{-1/12}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^i\frac{i}{i!}+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^i\frac{1}{i!}\right]$$

$$=\frac{1}{12}e^{-1/12}\left[\frac{1}{12}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^i\frac{1}{i!}+e^{1/12}\right]$$

$$=\frac{1}{12}e^{-1/12}\left[\frac{1}{12}e^{1/12}+e^{1/12}\right]=\frac{1}{12}\cdot\frac{13}{12}=\frac{13}{144},$$

故 $\quad \mathrm{var}[W]=E[W^2]-E^2[W]=\frac{13}{144}-\left(\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{12},$

而 $$P\{W \geqslant 2\} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} P\{W = k \mid X_{t_0} = i\} P\{X_{t_0} = i\}$$
$$= \mathrm{e}^{-1/12}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^k \frac{1}{k!} = \mathrm{e}^{-1/12}\left[\mathrm{e}^{1/12} - 1 - \frac{1}{12}\right].$$

第五节　条件泊松过程与过滤泊松过程

主 要 内 容

1. 设随机变量 $\Lambda>0$ 的分布函数为 G，在 $\Lambda=\lambda$ 的条件下，$\{N(t),t\geqslant0\}$是强度为 λ 的泊松过程，则称$\{N(t),t\geqslant0\}$为**条件泊松过程**.

若 Λ 的分布函数是 G，则随机选择一个个体在长度为 t 的时间区间内发生 n 次的概率是

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{d}G(\lambda).$$

2. 设$\{N(t),t\geqslant0\}$是条件泊松过程，且 $E(\Lambda^2)<\infty$，则

$$E[N(t)] = tE[\Lambda], \quad D[N(t)] = t^2D[\Lambda] + tE[\Lambda].$$

3. 在 $N(t)=n$ 条件下 Λ 的分布

$$P\{\Lambda \leqslant x \mid N(t) = n\} = \int_0^{x}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{d}G(\lambda)\Big/\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{d}G(\lambda),$$

因为 $P\{\Lambda \in (\lambda,\lambda+\mathrm{d}\lambda) \mid N(t) = n\}$

$$= \frac{P\{N(t) = n \mid \Lambda \in (\lambda,\lambda+\mathrm{d}\lambda)\}P\{\Lambda \in (\lambda,\lambda+\mathrm{d}\lambda)\}}{P\{N(t) = n\}}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{d}G(\lambda)\Big/\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{d}G(\lambda).$$

4. 设对随机过程$\{X(t),t\geqslant0\}$，有

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} h(t - U_i),$$

其中 $h(t)$为线性时不变系统的冲激响应,U_i 是随机变量,表示在时间区间$(0,t]$内发生的事件的无序到达时刻,则$\{X(t),t\geqslant 0\}$称为**过滤的泊松过程**.

5. 对过滤的泊松过程,有

$$E[X(t)]=\lambda\int_0^t h(u)\mathrm{d}u,\quad D[X(t)]=\lambda\int_0^t h^2(u)\mathrm{d}u,$$

$$\varphi_{X(t)}(v)=\exp\left\{\lambda\int_0^t(\mathrm{e}^{\mathrm{j}vh(u)}-1)\right\}\mathrm{d}u,$$

$$R_{XX}(t,t+\tau)=\lambda\int_0^t h(u)h(u+\tau)\mathrm{d}u+\lambda^2\left[\int_0^t h(u)\mathrm{d}u\right]^2,$$

$$C_{XX}(t,t+\tau)=\lambda\int_0^t h(u)h(u+\tau)\mathrm{d}u=C_{XX}(\tau).$$

疑 难 解 析

1. 条件泊松过程有什么特点?

答 条件泊松过程描述的是一个有着"风险"参数为 λ 的个体发生某一事件的概率. 例如有一个总体,它的个体存在某种差异(如不同的人发生事故的倾向性不同),此时,可以把概率式

$$P\{N(t+s)-N(t)=n\}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\ n=0,1,2,\cdots$$

解释为给定 λ 时,$N(t)$的条件分布 $P_{n|\lambda}(t)$.

在风险理论中常用条件泊松过程作为意外事件出现的模型,其强度参数 λ 未知(用随机变量 Λ 表示),但经过一段时间后,即可用事件发生的概率来表示,就有了确定的参数.

2. 试举例说明过滤泊松过程.

答 我们用温度限制的二极管作为例子进行分析.

(1) 在$[0,t)$内从阴极发射的电子数是符合泊松分布的.

(2) 假定二极管为平板型二极管,极间距离为 d,板极对阴极的电位差为 V_0(见图 2.1). 研究在没有空间电荷的条件下,一个发

射电子从阴极发射后至到达板极前，在电路内引起的电流脉冲

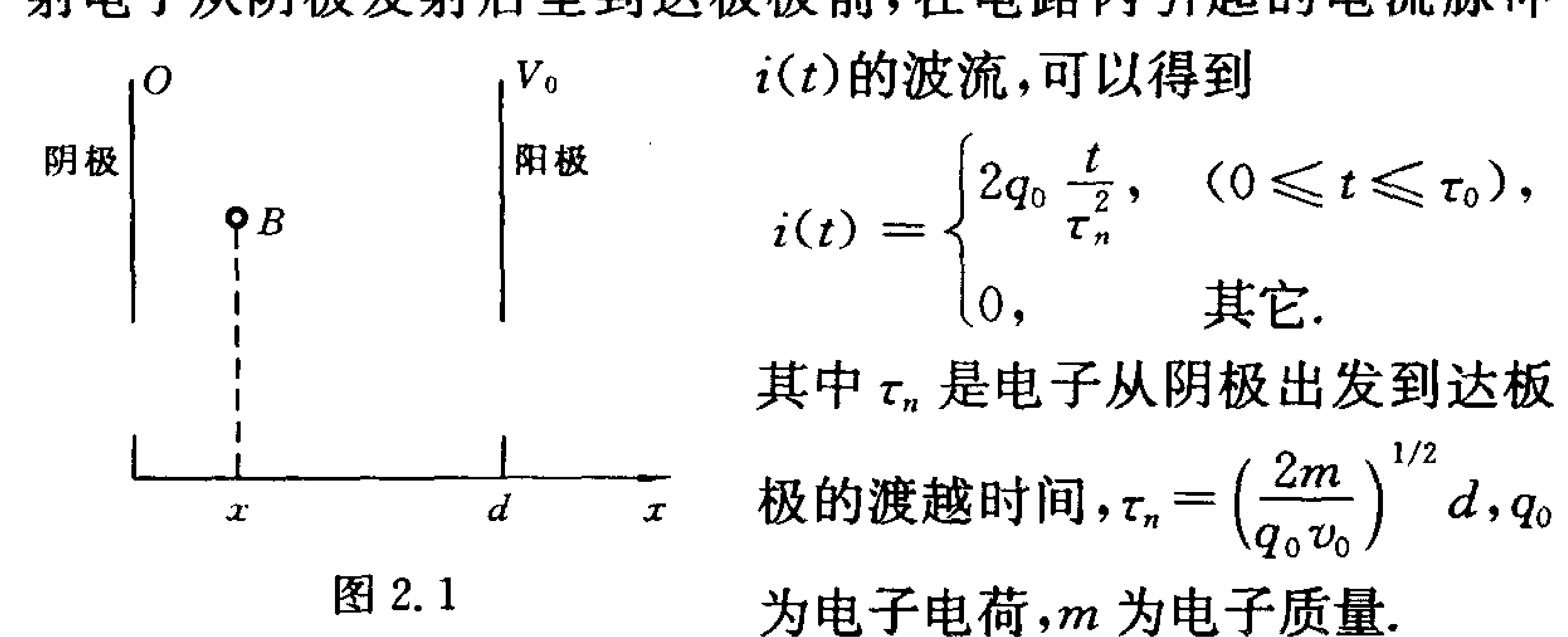


图 2.1

$i(t)$的波流，可以得到

$$i(t)=\begin{cases}2q_0\dfrac{t}{\tau_n^2}, & (0\leqslant t\leqslant \tau_0),\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

其中 τ_n 是电子从阴极出发到达板极的渡越时间，$\tau_n=\left(\dfrac{2m}{q_0v_0}\right)^{1/2}d$，$q_0$ 为电子电荷，m 为电子质量.

(3) 因此，温度限制二极管的板流为

$$I(t)=\sum_{i=1}^{N(T)}i(t-U_i)\ (t<T),$$

其中 $i(t)$如(2)中所给，U_i 为第 i 个电子的发射时刻，是在$[0,T)$内服从均匀分布的随机变量. 对照定义知，温度限制二极管的板流 $I(t)$是一过滤的泊松过程.

方法、技巧与典型例题分析

首先要对具体问题进行分析，确定是否条件泊松分布，是否过滤泊松分布，然后根据概率论和随机过程中知识进行计算.

例 1 设某地区在某季节地震出现的平均强度是随机变量 Λ，$P\{\Lambda=\lambda_1\}=p$，$P\{\Lambda=\lambda_2\}=1-p$. 到 t 时为止的地震次数是一个条件泊松过程. 求该地区该季节在$(0,t)$时间内出现 n 次地震的条件下地震强度为λ_1 的概率，并求在 $N(t)=n$ 的条件下，从 t 开始到下一次地震出现的条件分布.

解 该过程是条件泊松过程. 因为 Λ 是离散型，故

$$P\{\Lambda=\lambda_1\mid N(t)=n\}$$
$$=pe^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^n/[pe^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^n+(1-p)e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^n],$$

$P\{$从 t 开始到下次地震出现时间$\leqslant x\mid N(t)=n\}$

$$=\frac{p(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x})\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^n+(1-p)(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 x})\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^n}{p\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^n+(1-p)\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^n}.$$

例 2　设意外事故的发生受某种未知因素影响有两种可能 λ_1,λ_2，且 $P\{\Lambda=\lambda_1\}=p, P\{\Lambda=\lambda_2\}=1-p=q, 0<p<1$. 已知到时刻 t 已发生了 n 次事故，求下一次事故在 $t+s$ 之前不会到来的概率，并求事故发生频率是 λ_1 的概率.

解　该过程是条件泊松过程，Λ 为离散型，故

$$P\{(t,t+s)\text{ 内无事故} \mid N(t)=n\}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{2}P\{\Lambda=\lambda_1\}P\{N(t)=n,N(t+s)-N(t)=0\mid\Lambda=\lambda_1\}}{\sum_{i=1}^{2}P\{\Lambda=\lambda_1\}P\{N(t)=n\mid\Lambda=\lambda_1\}}$$

$$=\frac{p(\lambda_1 t)^n\mathrm{e}^{-\lambda_1(s+t)}+(1-p)(\lambda_2 t)^n\mathrm{e}^{-\lambda_2(s+t)}}{p(\lambda_1 t)^n\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+(1-p)(\lambda_2 t)^n\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}}$$

$$=\frac{p\lambda_1^n\mathrm{e}^{-\lambda_1(s+t)}+(1-p)\lambda_2^n\mathrm{e}^{-\lambda_2(s+t)}}{p\lambda_1^n\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+(1-p)\lambda_2^n\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}}\quad(1-p=q),$$

而 $P\{\Lambda=\lambda_1\mid N(t)=n\}=\dfrac{p\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^n}{p\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^n+(1-p)\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^n}$.

例 3　设 $\{X(t),t\geqslant 0\}$，并有 $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}h(t-U_i)$，其中，在时刻 U_i 发生的事件，在时刻 t 的输出为 $h(t-U_i)$；在时间间隔 $(0,t)$ 内发生的事件数由泊松随机变量 $N(t)$ 描述，U_i 是在 $(0,t)$ 内发生事件的无序到达时刻. 这个过程是滤波泊松过程，求特征函数 $\varphi_{X(t)}(v)$.

解　由 $E[Y]=E\{E[Y|X]\}$，依特征函数定义，有

$$\varphi_{X(t)}(v)=E\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}vX(t)}\}=E\{E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}vX(t)}\mid N(t)]\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}vX(t)}\mid N(t)=k]P\{N(t)=k\},$$

而　$$E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}vX(t)}\mid N(t)=k]=E[\exp\{\mathrm{j}v\sum_{i=1}^{k}h(t-U_i)\}],$$

因为U_i是独立同分布的随机变量，故

$$E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}vX(t)} \mid N(t)=k]=\prod_{i=1}^{k}E\{\exp[\mathrm{j}vh(t-U_i)]\}$$
$$=(E\{\exp[\mathrm{j}vh(t-U_i)]\})^k.$$

又U_i在$(0,t)$内是均匀分布的，所以

$$E\{\exp[\mathrm{j}vh(t-U_i)]\}=\frac{1}{t}\int_0^t\exp[\mathrm{j}vh(t-U_i)\mathrm{d}u_i]$$
$$=\frac{1}{t}\int_0^t\exp[\mathrm{j}vh(u)]\mathrm{d}u.$$

将结果代入$\varphi_{X(t)}(v)$，得

$$\varphi_{X(t)}(v)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t\exp[\mathrm{j}vh(u)]\mathrm{d}u\right\}^k\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}$$
$$=\mathrm{e}^{-\lambda t}\exp\left\{\lambda\int_0^t\exp[\mathrm{j}vh(u)]\mathrm{d}u\right\}$$
$$=\exp\left\{\lambda\int_0^t[\exp\{\mathrm{j}vh(u)\}-1]\mathrm{d}u\right\}.$$

例 4 对上题定义的过滤泊松过程$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}h(t-U_i;Y_i)$，考虑特殊情形

$$h(\tau;Y_i)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\tau<Y,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

其中Y_i是独立同分布的非负随机变量，设

$$\varphi_{X(t)}(v)=\exp\left\{\lambda\int_0^t E_Y[\mathrm{e}^{\mathrm{j}vh(\tau;Y)}-1]\mathrm{d}\tau\right\},$$

证明：(1) $X(t)$是泊松随机变量，其均值是

$$E[X(t)]=\lambda\int_0^t[1-F_Y(s)]\mathrm{d}s;$$

(2) $\lim\limits_{t\to\infty}E[X(t)]=\lambda E[Y]$.

证 (1) 将所给$h(\tau;Y)$代入，得

$$E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}vh(\tau;Y)}-1]=(\mathrm{e}^{\mathrm{j}v}-1)P\{Y\geqslant\tau\}=(\mathrm{e}^{\mathrm{j}v}-1)[1-F_Y(\tau)].$$

代入 $\varphi_{X(t)}(v)$，得

$$\varphi_{X(t)}(v)=\exp\left\{\lambda\int_0^t[1-F_Y(\tau)][e^{jv}-1]d\tau\right\},$$

故 $$E[X(t)]=-j\frac{d\varphi_{X(t)}(v)}{dv}\bigg|_{v=0}=\lambda\int_0^t[1-F_Y(\tau)]d\tau.$$

(2) 因为

$$\lambda\int_0^\infty[1-F_Y(\tau)]d\tau=\lambda[1-F_Y(\tau)]\tau\bigg|_0^\infty+\lambda\int_0^\infty\tau dF_Y(\tau)$$

$$=\lambda\int_0^\infty\tau P_Y(\tau)d\tau=\lambda E[Y],$$

所以 $$\lim_{t\to\infty}E[X(t)]=\lambda\int_0^\infty[1-F_Y(\tau)]d\tau=\lambda E[Y].$$

例 5 求温度限制二极管的散弹噪声 $I(t)$ 的平均值.

解 由疑难解析 2 知，散弹噪声即温度限制二极管的板流 $I(t)$ 是一过滤的泊松过程，有

$$E[I(t)]=\lambda\int_0^T i(t)dt=\lambda\int_0^{\tau_n}2q_0\frac{t}{\tau_n^2}dt=\lambda q_0,$$

其中 λ 是单位时间内发射的平均电子数，q_0 是电子电荷，$E[I(t)]$ 代表电流的平均值.

例 6 求温度限制二极管中板流 $I(t)$ 的相关函数、协方差函数及方差.

解 $I(t)$ 的相关函数为

$$R_{II}(t,t+\tau)=\lambda\int_0^t i(t)i(t+\tau)dt+\lambda^2\left[\int_0^t h(t)dt\right]^2$$

$$=\lambda\int_0^t i(t)i(t+\tau)dt+(\lambda q_0)^2;$$

$I(t)$ 的协方差函数为

$$C_{II}(t,t+\tau)=\lambda\int_0^t i(t)i(t+\tau)dt;$$

$I(t)$ 的方差为

$$\mathrm{var}[I(t)]=\lambda\int_0^t i^2(t)dt.$$

例 7 到达一有无数个通道的交换台的呼叫电话符合参数为 λ 的泊松过程，每次对话服从平均值为 $1/\mu$ 的指数分布，令 $X(t)$ 是时刻 t 通话的次数. 求：

(1) $E[X(t)]$和$\lim\limits_{t\to\infty}E[X(t)]$；(2) $\mathrm{var}[X(t)]$和$\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{var}[X(t)]$；

(3) 在过程中没有呼叫的概率.

解 该过程是一过滤泊松过程.

(1)
$$P_Y(\tau)=\begin{cases}\mu e^{-\mu\tau}, & \tau\geqslant 0,\\ 0, & \tau<0,\end{cases}$$

$$E[X(t)]=\lambda\int_0^t[1-F_Y(\tau)]\mathrm{d}\tau=\lambda\int_0^t e^{-\mu\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}),$$

故
$$\lim_{t\to\infty}E[X(t)]=\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})=\frac{\lambda}{\mu}.$$

(2) 因为泊松随机变量方差与均值相同，故

$$\mathrm{var}[X(t)]=\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}),\quad \lim_{t\to\infty}\mathrm{var}[X(t)]=\frac{\lambda}{\mu}.$$

(3) 没有呼叫即 $X(t)=0$，故没有呼叫的概率

$$P\{X(t)=0\}=\exp\{-E[X(t)]\}=\exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right\}.$$

第六节　更 新 过 程

主 要 内 容

1. 设$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$是一列独立同分布的非负随机变量，并设 $F(0)=P\{X_n=0\}<1$（通常约定 $F(0)=0$）. 令 $\mu=E[X_n]=\int_0^\infty x\mathrm{d}F(x)$，则 $0<\mu\leqslant\infty$. 设

$$T_n=\sum_{i=1}^n X_i,\ n\geqslant 1,\quad T_0=0,$$

则称计数过程 $N(t)=\sup\{n,T_n\leqslant t\}$为**更新过程**.

2. 在有限时间$[0,t]$内至多发生有穷次更新. 即有概率 1, $N(t)<\infty$.

3. $$\begin{aligned}P\{N(t)=n\}&=P\{N(t)\geqslant n\}-P\{N(t)\geqslant n+1\}\\&=P\{T_n\leqslant t\}-P\{T_{n+1}\leqslant t\}\\&=P\Big\{\sum_{i=1}^{n}X_i\leqslant t\Big\}-P\Big\{\sum_{i=1}^{n+1}X_i\leqslant t\Big\}\\&=F_n(t)-F_{n+1}(t).\end{aligned}$$

F_n 表示 T_n 的分布,是 F 的 n 重卷积.

4. $m(t)=E[N(t)]$称为更新过程 $N(t)$的**更新函数**,有 $m(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(t)$.

$m(t)$是 t 的不减函数,对任意 $0\leqslant t<\infty$,有 $m(t)<\infty$.

5. $m(t)$的导数 $\lambda(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(t)$. $f_n(t)$是 $F_n(t)$的密度函数,又称为**更新强度**.

6. $m(t)$和 $\lambda(t)$分别满足下列积分方程:

$$m(t)=F(t)+\int_0^t m(t-s)\mathrm{d}F(s),$$

$$\lambda(t)=f(t)+\int_0^t \lambda(t-s)f(s)\mathrm{d}s.$$

7. 如下形式的积分方程称为更新方程:

$$K(t)=H(t)+\int_0^t K(t-s)\mathrm{d}F(s).$$

其中 $H(t)$,$F(t)$已知. 当 $t<0$ 时,$H(t)$,$F(t)$均为零. 当 $H(t)$在任何区间上有界时,方程称为**适定**(Proper)**更新方程**,简称为**更新方程**. 主要内容 6 中两个方程也是更新方程.

当 $H(t)$为有界函数时,更新方程有唯一解

$$K(t)=H(t)+\int_0^t H(t-s)\mathrm{d}m(s),$$

其中 $M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$ 是分布函数 $F(t)$ 的更新函数.

8. 对 $\lambda(t)$ 取拉普拉斯变换,得

$$\Lambda(s)=\int_0^{\infty}\lambda(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

设 $\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\psi(s)$,则 $\int_0^{\infty}f_n(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}s=[\psi(s)]^n$,

故

$$\Lambda(s)=\sum_{n=1}^{\infty}[\psi(s)]^n=\frac{\psi(s)}{1-\psi(s)},$$

$$\psi(s)=\frac{\Lambda(s)}{1+\Lambda(s)}.$$

疑难解析

1. 更新过程与泊松过程有什么不同?

答 泊松过程与更新过程都是计数过程,事件发生的时间间隔 $X_1,X_2,\cdots$都是独立同分布的,但是泊松过程要求 $X_1,X_2,\cdots$必须服从同一指数分布,而更新过程可以是其它任意一种分布.

例如机器零件的更换.设在时刻 $t=0$ 安装一个新零件并开始工作,在时刻 X_1 此零件损坏又换上一个新零件并开始工作,在时刻 X_2 此零件损坏又……显然,这些零件的使用寿命是独立同分布的,到时刻 t 为止,所更换的零件数目就构成一个更新过程.

更新过程中事件发生一次叫做一次更新,所以 X_n 是第 $n-1$ 次更新与第 n 次更新的间隔时间,T_n 是第 n 次更新发生的时间,$N(t)$是到时刻 t 之前发生的更新总次数.

2. 为什么说:在有限时间$[0,t]$内发生无穷多次($N(t)=\infty$)更新的概率是零.

答 由强大数定律知$\left(\sum_{i=1}^{n}X_n\right)\Big/n=T_n/n\to\mu$,以概率 1 成立,而$\mu>0$,故当$n\to\infty$时,$T_n\to\infty$.即无穷多次更新只能在无限

长时间内发生.

方法、技巧与典型例题分析

理解更新过程的基本概念，掌握关于更新过程的基本计算，善于应用概率论的知识是解题的关键.

例 1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是一列独立同分布的非负随机变量，且 $P\{X_n=i\}=p(1-p)^{i-1}$, $i\geqslant 1$，求 $P\{N(t)=n\}$和更新函数 $m(t)$.

解 依题意，时间间隔 X_n 服从几何分布. X_n 取 i 的概率相当于在贝努利试验中当第 i 次试验时取得首次成功的概率，故 T_n 取 k 的概率相当于在贝努利试验中当第 k 次试验时才取得第 n 次成功的概率，即

$$P\{T_n=k\}=\begin{cases}C_{k-1}^{n-1}p^n(1-p)^{k-n}, & k\geqslant n,\\ 0, & k<n.\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}&P\{N(t)=n\}\\ &=F_n(t)-F_{n+1}(t)=P\{T_n<t\}-P\{T_{n+1}<t\}\\ &=\sum_{k=n}^{[t]}C_{k-1}^{n-1}p^n(1-p)^{k-n}-\sum_{k=n+1}^{[t]}C_{k-1}^{n}p^{n+1}(1-p)^{k-n-1},\end{aligned}$$

$[t]$表示不大于 t 的最大正整数. 所以更新函数

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)=\sum_{r=0}^{k}rP\{N(t)=r\}.$$

例 2 设某更新过程的密度函数 $\lambda(t)$为

$$\lambda(t)=\begin{cases}\lambda, & t\geqslant 0,\lambda>0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

求更新过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$的时间间隔 X_n 的概率密度.

解 因为 $\Lambda(s)=\int_0^{\infty}\lambda(t)e^{-st}dt=\lambda/s$.

$$\psi(s)=\frac{\lambda}{s}\bigg/\left(1+\frac{\lambda}{s}\right)=\frac{\lambda}{s+\lambda},$$

故 $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[\psi(s)]=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

所以,一个密度函数为常数的更新过程是泊松过程,其时间间隔服从负指数分布.

例 3 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是一列独立同分布的非负随机变量,$P\{X_1=1\}=q,P\{X_1=2\}=p,p+q=1$. 求更新函数 $m(t)$.

解 因为 $T_n=\sum_{i=1}^{n}X_i=n+T'_n$,其中 $T'_n=\sum_{i=1}^{n}X'_i$, $P\{X'_i=1\}=p,P\{X'_i=0\}=q$,故 T'_n 是参数为 n 的二项分布随机变量,从而得出 $N(t)$的分布,求出 $m(t)$. 但由分布函数求 $m(t)$相当困难,因为要计算 F 的 n 重卷积. 下面利用差分方程来求. 因为

$$m(t)=E[N(t)]=E[N(t)\mid X_1=1]q+E[N(t)\mid X_1=2]p$$

但对于 $t\geqslant 2$,有

$$E[N(t)\mid X_1=1]=1+m(t-1),$$
$$E[N(t)\mid X_1=2]=1+m(t-2),$$

所以 $$m(t)=qm(t-1)+pm(t-2)+1.$$

由于 X_i 只取整数值,故 $N(t)=N([t])$,只需解差分方程

$$m(n)=qm(n-1)+pm(n-2)+1,$$

其边界条件是 $m(0)=1,m(1)=q$,求得解是

$$m(n)=q+\frac{n-1}{1+p}+\frac{p^3+(-1)^n p^{n+2}}{(1+p)^2}.$$

例 4(沃尔德(Wald)等式) 设 $E[X_i]<\infty,n=1,2,\cdots$,证明:

$$E[T_{N(t)+1}]=E[X_1+X_2+\cdots+X_{N(t)+1}]=E[X_1]E[N(t)+1]$$

证 对第一次更新时刻 X_1 取条件

$$E[T_{N(t)+1}\mid X_1=x]=\begin{cases}x+E[T_{N(t-x)}], & x\leqslant t,\\ x, & x>t.\end{cases}$$

如图 2.2 所示.

记 $K(t)=E[T_{N(t)+1}]$,则有

$$K(t)=E[T_{N(t)+1}]=E[E(T_{N(t)+1}\mid X_1=x)]$$

图 2.2

$$= \int_0^{\infty} E[T_{N(t)+1} \mid X_1 = x] \mathrm{d}F(x)$$

$$= \int_0^t [x + K(t-x)] \mathrm{d}F(x) + \int_t^{\infty} x \mathrm{d}F(x)$$

$$= E[X_1] + \int_0^t K(t-x) \mathrm{d}F(x).$$

即得到更新方程，其有界解为

$$K(t) = E[X_1] + \int_0^t E[X_1] \mathrm{d}m(x) = E[X_1][1 + m(t)]$$

$$= E[X_1]\{E[N(t)+1]\}.$$

例 5 设一更新过程的不同到达时刻服从指数分布，有

$$F_Z(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

(1) 求特征函数 $\varphi_Z(v)$；

(2) 求过程的第 j 次到达的特征函数 $\varphi_{T(j)}(v)$；

(3) 求第 j 次到达时间对应的概率分布函数；

(4) 证明过程的计数随机变量 $N(t)$ 服从泊松分布，即 $F_{N(t)}(k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$.

解 (1) 由定义知，特征函数是

$$\varphi_Z(v) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}vt}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}vt} \mathrm{d}F_Z(t) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}vt} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{j}v}.$$

(2) 过程的第 j 次到达的特征函数是

$$\varphi_{T(j)}(v) = [\varphi_Z(v)]^j = \left(\frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{j}v}\right)^j.$$

(3) 第 j 次到达时间的概率密度函数是特征函数 $\varphi_{T(j)}(v)$ 的傅里叶逆变换，故

$$f_{T(j)}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \frac{\lambda^n t^{j-1}}{(j-1)!}.$$

分布函数是

$$F_{T(j)}(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum\limits_{i=0}^{j-1} \dfrac{(\lambda t)^i}{i!}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

(4) 利用等价事件的概率分布函数 $F_{X_k}(t) = 1 - F_{N(t)}(k-1)$，

有 $F_{N(t)}(j) = 1 - F_{T(j+1)}(k-1) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum\limits_{i=0}^{j} \dfrac{(\lambda t)^i}{i!}$, $i = 0, 1, \cdots$,

即 $N(t)$ 服从泊松分布.

例 6 有一个确定性的人口模型：$B(t)$ 表示时刻 t 女婴的出生速率，即在 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 内有 $B(t)\mathrm{d}t$ 个女婴出生，设生存函数 $S(x)$（指女婴能活到年龄 x 的概率）和生育的年龄强度（指年龄为 x 的母亲生育女婴的速率，在 $[t, t+\Delta t]$ 内生育女婴数是 $\beta(x)\mathrm{d}x$）已知，已知过去的 $B(t)$ $(t \leqslant 0)$，预测未来的 $B(t)$ $(t > 0)$.

解 因为在时刻 t，有 $B(t-x)S(x)\mathrm{d}x$ 个女性年龄在 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 之间（即 x 年前出生的女婴存活超过 x 年的人数）. 在此时刻，单位时间内又将生育 $B(t-x)S(x)\beta(x)\mathrm{d}x$ 个女婴，从而知每单位时间内所有育龄段女性所生育女婴数是

$$B(t) = \int_0^{\infty} B(t-x)S(x)\beta(x)\mathrm{d}x.$$

可按过去和将来将积分分段，即

$$B(t) = \int_t^{\infty} B(t-x)S(x)\beta(x)\mathrm{d}x + \int_0^t B(t-x)S(x)\beta(x)\mathrm{d}x.$$

上式是一个更新方程. 即

$$f(x) = S(x)\beta(x), \quad H(t) = \int_t^{\infty} B(t-x)S(x)\beta(x)\mathrm{d}x.$$

作代换 $x = y + t$，得

$$H(t) = \int_0^{\infty} B(-y)S(y+t)\beta(y+t)\mathrm{d}y.$$

其中 $H(t)\mathrm{d}t$ 是由年龄为 t 或大于 t 的女性在时间$[t,t+\Delta t]$内生育的女婴数. 同时，每个新生女婴将期待在年龄 x 与 $x+\mathrm{d}x$ 之间生育 $f(x)\mathrm{d}x$ 个女婴. 于是，每一新生女婴在死亡或生存到年龄 x 之前将期待生育 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 个女婴，从而在其一生中将期待生育 $H(\infty)$ 个女婴.

若 $H(\infty)>1$，可解得 $B(t)\sim C\mathrm{e}^{-Rt}$，$t\to\infty$，其中 C 为常数，R 满足方程 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{Ry}S(y)\beta(y)\mathrm{d}y=1$. 即出生速率将以渐近指数增长.

若 $H(\infty)<1$，$k>0$，$B(t)$以渐近指数地趋向于零，即人群最终消亡.

若 $H(\infty)=1$，则出生速率最终趋向于一个有限的正数.

第七节　更新定理

主要内容

1. **费勒初等更新定理**　记 $\mu=E[X_n]$，则$\frac{m(t)}{t}\to\frac{1}{\mu}(t\to\infty)$，若 $\mu=\infty$，则 $1/\mu=0$.

2. **格点分布**　若存在 $d\geqslant0$，使得 $\sum_{n=0}^{\infty}P\{X=nd\}=1$，则称随机变量 X 服从格点分布. 满足上述条件的最大的 d 是此格点分布的周期.

3. **布莱克韦尔(Blackwell)更新定理**　记 $\mu=E[X_n]$，有：

(1) 若 F 不是格点的，则对一切 $a\geqslant0$，当 $t\to\infty$时，有

$$m(t+a)-m(t)\to a/\mu.$$

(2) 若 F 是格点的，周期为 d，则当 $n\to\infty$时，有

$$P\{在\ nd\ 处发生更新\}\to d/\mu.$$

4. **关键更新定理**(史密斯(Smith)更新定理)　记 $\mu=E[X_n]$，设函数 $h(t),t\in[0,\infty)$，满足：1°$h(t)$非负不增；2°$\int_0^\infty h(t)\,\mathrm{d}t<\infty$. 设 $H(t)$是更新方程 $H(t)=h(t)+\int_0^t h(t-x)\mathrm{d}F(x)$的解，有：

(1) 若 F 不是格点的，则

$$\lim_{t\to\infty}H(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_0^\infty h(x)\mathrm{d}x, & \mu<\infty,\\ 0, & \mu=\infty;\end{cases}$$

(2) 若 F 是格点的，对于 $0\leqslant c\leqslant d$，则

$$\lim_{t\to\infty}H(c+nd)=\begin{cases}\dfrac{d}{\mu}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}h(c+nd), & \mu<\infty,\\ 0, & \mu=\infty.\end{cases}$$

5. 设一个过程有“开”、“关”两个状态，先“开”，持续一段时间后“关”；再持续一段时间后又“开”，再持续一段时间后又“关”……如此“开”“关”下去. 设“开”的时间为$\{Z_n\}$，“关”的时间为$\{Y_n\}$，$\{Z_n,Y_n\}$，$n=1,2,\cdots$是独立同分布随机变量，$\{Z_n\}$，$\{Y_n\}$是独立同分布随机序列，但 Z_n 与 Y_n 不相互独立，则更新过程称为**交错更新过程**.

若交错更新过程中 Z_n 的分布为 H，Y_n 的分布为 G，Z_n+Y_n 的分布函数为 F，$n=1,2,\cdots$，记 $P(t)=P\{$过程在 t 时刻为“开”$\}$，则当 $E[Z_n+Y_n]<\infty$，F 是非格点分布时，有

$$\lim_{t\to\infty}P(t)=\frac{E[Z_n]}{E[Z_n]+E[Y_n]}.$$

疑 难 解 析

1. 说明极限$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{N(t)}{t}$的意义.

答　在上一节已经知道，在有限长的时间内更新的次数是有

限的，而当 $t\to\infty$ 时，$N(t)$ 依概率 1 趋向于无穷. 但是，趋向于无穷的速率是多少呢？这就是极限 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}$ 的意义.

费勒初等更新定理给出：若 $\mu=E[X_n]$，则极限 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$，即更新过程的速率为 $1/\mu$.

布莱克韦尔更新定理则进一步指出：若 $\mu=E[X_n]$，若 F 是格点分布，周期为 d，则当 $n\to\infty$ 时，$P\{在\ nd\ 处发生更新\}\to d/\mu$；若 F 不是格点分布，则对一切数 $a\geqslant 0$，当 $t\to\infty$ 时，有 $M(t+a)-M(t)\to a/\mu$. 因为 $1/\mu$ 可以看做常时间更新过程发生的平均速率，所以在远离原点的一个长度为 a 的区间内，更新次数的期望值是 a/μ.

2. 初等更新定理与布莱克韦尔定理之间有什么关系？

答 前者是后者的特例. 令 $b_n=m_n-m_{n-1}$，当 F 是非格点分布时，$b_n\to 1/\mu\ (a=1)$，$n\to\infty$.

由极限的性质，得

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=\frac{m(n)}{n}\to\frac{1}{\mu},\quad n\to\infty.$$

而对任何实数 t，有

$$\frac{[t]}{t}\cdot\frac{M([t])}{[t]}\leqslant\frac{M(t)}{t}\leqslant\frac{[t]+1}{t}\cdot\frac{M([t]+1)}{[t]+1}.$$

令 $t\to\infty$，得 $\frac{M(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$.

当 F 是格点分布时，也可以证得同样结果.

方法、技巧与典型例题分析

如何将具体问题分析清楚，然后利用定理求得结果，需要读者多想、多动手练习，细心体会例题中的方法与技巧. 下面给出一些从简单到较为复杂的例题.

例 1 某控制器用一节电池供电，电池失效时立即更换同一型号的新电池. 设电池的寿命服从(30,60)（单位：h）内的均匀分布，求长时间工作时，控制器更换电池的速率.

解 以 $N(t)$ 记在时间 t 内更换的电池数. 则在长时间工作时，电池的更新速率是

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}.$$

而
$$\mu=\int_{30}^{60}t\,\frac{1}{60-30}\mathrm{d}t=45\quad(\mathrm{h}),$$

所以，更换电池的速率为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{45}\quad(\mathrm{h}^{-1}).$$

例 2 在例 1 中，如果没有备用电池，电池失效时需去仓库领取. 设领取新电池时间服从(0,1)（单位：h）内的均匀分布，求在长时间工作的情况下，控制器更换电池的速率.

解 设两次相邻更换间所需平均时间为

$$\mu=E[X_i]+E[Y_i],$$

已知
$$E[X_i]=\int_{30}^{60}t\,\frac{1}{60-30}\mathrm{d}t=45\quad(\mathrm{h}),$$

$$E[Y_i]=\int_{0}^{1}t\,\frac{1}{1-0}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\quad(\mathrm{h}),$$

故
$$\mu=45+\frac{1}{2}=\frac{91}{2}\quad(\mathrm{h}),$$

所以，在长时间工作情况下，控制器更换电池的速率是

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}=\frac{2}{91}\quad(\mathrm{h}^{-1}).$$

例 3 设有一个只有一个服务员的银行，在时间$[0,t]$内到达的潜在顾客服从泊松分布，到达速率为 λ. 若顾客到达时服务员空闲，顾客接受服务，否则顾客离开. 设顾客接受服务的时间是服从某一分布的随机变量，求：

(1) 顾客进入银行接受服务的速率；

(2) 进入银行的顾客占潜在顾客的比率.

解 若到达银行的潜在顾客服从泊松分布，则两个相邻潜在顾客间的时间间隔服从负指数分布. 由负指数分布的无记忆性，因此两个相邻进入银行的顾客的平均时间为

$$\mu = \mu_G + 1/\lambda.$$

其中，G 表示服务时间的分布规律，μ_G 表示服务时间的平均值. 从而，在长时间工作的情况下，进入银行的顾客速率是 $\frac{1}{\mu}=\frac{\lambda}{1+\lambda\mu_G}$.

又知潜在顾客到达速率为 λ，所以进入银行接受服务的顾客占潜在顾客的比率为

$$\left(\frac{\lambda}{1+\lambda\mu_G}\right)/\lambda = \frac{1}{1+\lambda\mu_G}.$$

例 4(剩余寿命与年龄的极限分布) 以 $r(t)=T_{N(t)+1}-t$ 表示时刻 t 的剩余寿命(即从 t 开始到下次更新剩余的时间)，$s(t)=t-T_N(t)$ 表示 t 时刻的年龄. 求 $r(t)$ 与 $s(t)$ 的极限分布.

解 令 $\tilde{R}_Y=P\{r(t)>y\}$，对第一次更新的时刻 X_1 取条件，得

$$P\{r(t)>y \mid X_1=x\}=\begin{cases}1, & x>t+y,\\ 0, & t<x\leqslant t+y,\\ R_Y(t-x), & 0<x\leqslant t.\end{cases}$$

由全概率公式，有

$$\begin{aligned}\tilde{R}_Y(t) &= \int_0^{\infty} P\{r(t)>y \mid X_1=x\}\mathrm{d}F(x)\\ &= \int_{t+y}^{\infty}\mathrm{d}F(x)+\int_0^t R_Y(t-x)\mathrm{d}F(x)\\ &= 1-F(t+y)+\int_0^t[1-F(t+y-x)]\mathrm{d}F(x).\end{aligned}$$

这是一个更新方程，依定理有解

$$\tilde{R}_Y(t)=1-F(t+y)+\int_0^t[1-F(t+y-x)]\mathrm{d}F(x).$$

设 $\mu=E[X_1]<\infty$，则

$$\mu=\int_0^{\infty}x\mathrm{d}F(x)=\int_0^{\infty}[1-F(x)]\mathrm{d}x<\infty.$$

从而 $$\int_0^{\infty}[1-F(t+y)]\mathrm{d}t=\int_y^{\infty}[1-F(z)]\mathrm{d}z<\infty.$$

即 $1-F(t+y)$满足关键更新定理条件，有

$$\lim_{t\to\infty}P\{r(t)>y\}=\lim_{t\to\infty}R_Y(t)=\frac{1}{\mu}\int_y^{\infty}[1-F(z)]\mathrm{d}z,z>0.$$

从上式可得 $s(t)$的分布. 因为

$$\{r(t)>x,s(t)>y\}\Longleftrightarrow\{r(t-y)>x+y\},$$

于是 $$\lim_{t\to\infty}P\{r(t)>x,s(t)>y\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\{r(t-y)>x+y\}=\frac{1}{\mu}\int_{x+y}^{\infty}[1-F(z)]\mathrm{d}z.$$

然后，取特例即得

$$\lim_{t\to\infty}P\{s(t)>y\}=\lim_{t\to\infty}P\{s(t)>y,r(t)>0\}$$

$$=\frac{1}{\mu}\int_y^{\infty}[1-F(z)]\mathrm{d}z.$$

由本例可得出应用关键更新定理的常用方法与技巧是：先关于某次更新(一般取第一次或时刻 t 前的最后一次)取条件得出一个更新方程，再利用关键更新定理推导所需结果.

例 5(商店存货问题) 一商店经营某类商品，设顾客按一更新过程到达，到达时间间隔是非格点分布 F；每个顾客购买的商品数是独立同分布的随机变量，分布函数为 G. 商店的进货策略是：若某顾客购货后库存量少于 S 就进货，使存货达到 S，否则不进货. 即若一顾客购货后存货为 x，则进货数应为$\begin{cases}S-x, & x<S,\\0, & x\geqslant S.\end{cases}$设进货是立即完成的，不占时间. 以 $X(t)$记在时刻 t 商品的存货量，求$\lim\limits_{t\to\infty}P\{X(t)\geqslant x\}$.

解 若 $X(0)=S$ 作为“开”，存货数少于 x 作为“关”，得到一个交错更新过程. 由主要内容 5 得

$$\lim_{t\to\infty}P\{X(t)\geqslant x\}=\frac{E[\text{一次循环中存货数大于 }x\text{ 的总时间}]}{E[\text{一次循环的总时间}]}.$$

设按先后顺序，第 i 个顾客购货数为 Y_i，令

$$N_x=\min\{n:Y_1+Y_2+\cdots+Y_n>S-x\}.$$

N_x 表示一次循环中首次使存货数少于 x 的顾客的序数，N_s 表示一次循环终止时顾客的序数，X_i 表示到达时间间隔，并设到达时间间隔与顾客购货数是相互独立的. 由沃尔德等式（见第六节例4）知

$$\lim_{t\to\infty}P\{X(t)\geqslant x\}=E[\sum_{i=1}^{N_x}X_i]/E[\sum_{i=1}^{N_s}X_i]=E[N_x]/E[N_s].$$

这样，由 N_x 的定义，可将 N_x-1 看做“到达时间间隔”为 $Y_i,i\geqslant1$ 的另一个更新过程在$[0,S-x]$中的更新次数，所以

$$E[N_x]=m_G(S-x)+1,\quad E[N_s]=m_G(S-x)+1.$$

这里 $m_G(t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)$，$G_i$ 为 Y_i 的共同分布G，$i=1,2,\cdots$. $m_G(t)$ 为更新过程的更新函数. 于是，得到极限式

$$\lim_{t\to\infty}P\{X(t)\geqslant x\}=\frac{1+m_G(S-x)}{1+m_G(S-s)},\quad x\leqslant S.$$

第三章　马尔可夫链

第一节　马尔可夫过程的概念

主 要 内 容

1. 如果对于 T 中任意有限个点 $t_1<t_2<\cdots<t_n$，以及 E 中任意点 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$，x 和 E 中的任意波雷尔(Borel)集 A，都有
$P\{X(t)\in A\mid X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_n)=x_n,X(t)=x\}$，
则称随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 为**马尔可夫**(Markov)**过程**. 称其条件有**马尔可夫性**.

上述结论也可写成

$$P\{X(t_n)\leqslant x_n\mid X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$
$$=P\{X(t_n)\leqslant x_n\mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\},\quad x_n\in\mathbf{R},$$

或
$$F_{t_n|t_1t_2\cdots t_{n-1}}(x_n,t_n\mid x_1,x_2,\cdots,x_{n-1};t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})$$
$$=F_{t_n|t_{n-1}}(x_n,t_n\mid x_{n-1},t_{n-1}).$$

参数集 $T=(0,\infty)$ 或 $T=(0,1,2,\cdots)=\mathbf{N}^+$，状态空间 $E=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}$ 中某波雷尔集.

2. 马尔可夫过程可以分为：

(1) 时间参数离散、状态空间离散的过程，称为**马尔可夫链**，简称**马氏链**.

(2) 时间参数连续、状态空间离散的过程称为**纯不连续马尔可夫过程或可数状态的马尔可夫过程**.

(3) 时间参数离散、状态空间连续的过程，称为**马尔可夫序列**.

(4) 时间参数连续，状态空间连续的过程，称为**连续马尔可夫过程**或**扩散过程**.

疑难解析

马尔可夫过程有什么特性?

答 马尔可夫过程具有马尔可夫性或无后效性，即：在过程(或系统)在时刻 t_0 所处的状态为已知的条件下，过程在时刻 $t>t_0$ 所处状态的条件分布与过程在时刻 t_0 之前所处的状态无关. 也就是说，在已知过程的"现在"的条件下，过程的"将来"与过程的"过去"无关，只与"现在"有关.

马尔可夫性可用分布函数来表述. 设随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 的状态空间为 E，若对时间 t 的任意 n 个数值 $t_1<t_2<\cdots<t_n$，在条件 $X(t_i)=x_i, x_i\in E,\quad i=1,2,\cdots,n-1$ 下，有

$$P\{X(t_n)\leqslant x_n \mid X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2, \cdots, x(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$
$$=P\{X(t_n)\leqslant x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\},\quad x_n\in \mathbf{R},$$

或

$$F_{t_n|t_1t_2\cdots t_{n-1}}(x_n,t_n \mid x_1,x_2,\cdots,x_{n-1};t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})$$
$$=F_{t_n|t_{n-1}}(x_n,t_n \mid x_{n-1},t_{n-1}),$$

或

$$f_{t_n|t_1t_2\cdots t_{n-1}}(x_n,t_n \mid x_1,x_2,\cdots,x_{n-1};t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})$$
$$=f_{t_n|t_{n-1}}(x_n,t_n \mid x_{n-1},t_{n-1}).$$

以上各式的写法在不同教材中可能有所不同(如对分布函数和概率密度函数的表示式，有的教材不写出括号内的 t_i)，要注意识别.

方法、技巧与典型例题分析

熟悉定义，辨识哪些过程是马尔可夫过程，可为后面的证明与计算奠定基础.

例 1 设$\{X(t),t\in T\}$是一独立随机过程，即对于 n 个 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，$X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$总体独立，证明：$\{X(t),t\in T\}$是一马尔可夫过程.

证 由题给条件知，随机事件 $X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_n)=x_n,X(t)\leqslant x$ 也相互独立，所以

$$P\{X(t)\leqslant x \mid X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_n)=x_n\}$$
$$=P\{X(t)\leqslant x\},$$
$$P\{X(t)\leqslant x \mid X(t_n)=x_n\}=P\{X(t)\leqslant x\},$$

从而 $$P\{X(t)\leqslant x \mid X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_n)=x_n\}$$
$$=P\{X(t)\leqslant x \mid X(t_n)=x_n\}.$$

即知$\{X(t),t\in T\}$是马尔可夫过程.

例 2 设 $E=\mathbf{R}$，$\{Y(n),n\geqslant 1\}$是独立随机序列，令 $X(1)=Y(1)$，$X(n)=\sum_{k=1}^{n}Y(k)$，则$\{X(n),n\geqslant 1\}$是一马尔可夫过程.

证 由题给条件知，当 $s_1<s_2<\cdots<s_n<s_{n+k}\ (k\geqslant 1)$时，随机变量 $X(s_1),X(s_2)-X(s_1),\cdots,X(s_n)-X(s_{n-1}),X(s_{n+k})-X(s)$相互独立.

令 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in E$，A 为 E 中的波雷尔集，则

$$A_n=\{x:x=y-x_n,y\in A\}$$

也是 E 中的波雷尔集. 故 $X(s_1)=x_1,X(s_2)-X(s_1)=x_2-x_1,\cdots,X(s_n)-X(s_{n-1})=x_n-x_{n-1},X(s_{n+k})-X(s_n)\leqslant x$ 也相互独立. 且

$$P\{X(s_{n+k})\leqslant y \mid X(s_1)=x_1,X(s_2)=x_2,\cdots,X(s_n)=x_n\}$$
$$=P\{X(s_{n+k})-X(s_n)\leqslant x-x_n \mid X(s_1)=x_1,$$
$$X(s_2)-X(s_1)=x_2-x_1,\cdots,X(s_n)-X(s_{n-1})=x_n-x_{n-1}\}$$
$$=P\{X(s_{n+k})-X(s_n)\leqslant y-x_n\}.$$

类似地，因为 $X(s_{n+k})-X(s_n)$与 $X(s_n)$独立，所以

$$P\{X(s_{n+k})\leqslant y \mid X(s_n)=x_n\}$$
$$=P\{X(s_{n+k})-X(s_n)\leqslant y-x_n \mid X(s_n)=x_n\}$$

$$= P\{X(s_{n+k}) - X(s_n) \leqslant y - x_n\}.$$

从而，$\{X(n), n\geqslant 1\}$是一马尔可夫过程.

例 3 设$\{X(t), t\in T\}$是一独立增量过程，且 $P\{X(0)=x_0\}=1$ (x_0 为常数)，证明：$\{X(t), t\in T\}$是一马尔可夫过程.

证 与例 2 类似，由已知条件得，当 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t\in T$ 时，有 $X(t_1)-X(t_0), X(t_2)-X(t_1), \cdots, X(t)-X(t_n)$相互独立.不妨设 $x_0=0$，于是，$X(t)-X(t_n)$与 $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)$相互独立. 故

$$\begin{aligned} &P\{X(t) \leqslant x \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_n) = x_n\} \\ &= P\{X(t) - X(t_n) \leqslant x - x_n \mid X(t_1) = x_1, \\ &\quad X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_n) = x_n\} \\ &= P\{X(t) - X(t_n) \leqslant x - x_n\}. \end{aligned}$$

又因为
$$\begin{aligned} &P\{X(t)\leqslant x | X(t_n)=x_n\} \\ &=P\{X(t)-X(t_n)\leqslant x-x_n | X(t_n)=x_n\} \\ &=P\{X(t)-X(t_n)\leqslant x-x_n\}, \end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned} &P\{X(t)\leqslant x | X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2, \cdots, X(t_n)=x_n\} \\ &=P\{X(t)\leqslant x | X(t_n)=x_n\}. \end{aligned}$$

即知$\{X(t), t\in T\}$是一马尔可夫过程.

也可以由例 2 结果直接得到结论.

因为泊松过程是独立过程，所以泊松过程是马尔可夫过程. 维纳(Wiener)过程也是马尔可夫过程.

第二节 马尔可夫链的概念

主 要 内 容

1. 设马尔可夫过程$\{X_n, n\in T\}$的参数集 $T=\{0,1,2,\cdots\}$，状态集 $I=\{i_1, i_2, \cdots\}$可以是$\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$或$\{0,1,2,\cdots\}$或

$\{0,1,2,\cdots,n\}$.

定义 设有随机过程$\{X_n,n\in T\}$,若对于任意的整数 $n\in T$ 和任意的$i_0,i_1,\cdots,i_{n+1}\in I$,有

$$P\{X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_0=i_0,X_1=i_1,X_2=i_2,\cdots,X_n=i_n\}$$
$$=P\{X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_n=i_n\},$$

则称$\{X_n,n\in T\}$为**马尔可夫链或马氏链**.

2. 条件概率 $p_{ij}(m)=P\{X_{m+1}=j\mid X_m=i\}$称为马尔可夫链$\{X_n,n\in T\}$在时刻 m 的**一步转移概率**.

条件概率 $p_{ij}^{(k)}(m)=P\{X_{m+k}=j\mid X_m=i\}$称为马尔可夫链$\{X_n,n\in T\}$在时刻 m 的 k **步转移概率**.

3. 马尔可夫链$\{X_n,n\in T\}$的转移概率 $p_{ij}^{(k)}(m)$具有下列性质:

(1) $p_{ij}^{(k)}(m)\geqslant 0,\ i,j\in I$; (2) $\sum p_{ij}^{(k)}(m)=1,\ i,j\in I$.

并且规定 $p_{ij}^{(0)}(m)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

4. 若对于任意的 $i,j\in I$,马尔可夫链$\{X_n,n\in T\}$的转移概率只与 i,j 有关,而与时刻 n 无关,则称马尔可夫链是**时齐的或齐次的**,并记 $p_{ij}(m)$ 为 p_{ij}.

5. 一步转移概率 p_{ij}所排成的矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

称为**转移概率矩阵**.它具有下列性质:

(1) $\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{(n-1)}$; (2) $\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}^n$.

6. **切普曼-柯尔莫哥洛夫**(Chapman-Kolmogorov)**方程**对于任意整数 k,l,有

$$p_{ij}^{(k+l)}(m)=\sum_{r\in I}p_{ir}^{(k)}(m)p_{rj}^{(l)}(m+k).$$

推论 1 $p_{ij}^{(k+1)}(m)$

$$=\sum_{s_1\in I}\sum_{s_2\in I}\cdots\sum_{s_k\in I}p_{is_1}(m)p_{s_1s_2}(m+1)\cdots p_{s_kj}(m+k).$$

推论 2

$$p_{ij}^{(k+1)}(m)=\sum_{r\in I}p_{ir}(m)p_{rj}(m+1)$$
$$=\sum_{r\in I}p_{ir}^{(k)}(m)p_{rj}(m+k).$$

7. 设$\{X_n,n\in T\}$为马尔可夫链，称

$$p_j=P\{X_0=j\}\quad 和\quad p_j(n)=P\{X_n=j\},\quad j\in I$$

为$\{X_n,n\in T\}$的**初始概率**和**绝对概率**，并分别称$\{p_j,j\in I\}$和$\{p_j(n),j\in I\}$为$\{X_n,n\in T\}$的**初始分布**和**绝对分布**，简记为$\{p_j\}$和$\{p_j(n)\}$. 称概率向量

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(n)=(p_1(n),p_2(n),\cdots),\quad n>0$$

为 n 时刻的**绝对概率向量**. 而称

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(0)=(p_1,p_2,\cdots)$$

为**初始概率向量**.

对于任意 $j\in I$ 和 $n\geqslant1$，绝对概率 $p_j(n)$具有以下性质：

(1) $p_j(n)=\sum_{i\in I}p_ip_{ij}^{(n)}$；　(2) $p_j(n)=\sum_{i\in I}p_i(n-1)p_{ij}$；

(3) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(n)=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}^{(n)}$；　(4) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(n)=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(n-1)\boldsymbol{P}$.

8. 设$\{X_n,n\in T\}$为马尔可夫链，则对于任意 $i_1,i_2,\cdots,i_n\in I$ 和$n\geqslant I$，有

$$P\{X_1=i_1,X_2=i_2,\cdots,X_n=i_n\}=\sum_{i\in I}p_ip_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}.$$

疑 难 解 析

1. 怎样理解切普曼-柯尔莫哥洛夫方程(简称 C-K 方程)？

答　C-K 方程表明：从状态 i 出发经过 $k+l$ 步到达状态 j 的

过程可分两个阶段:先从状态 i 出发经过 k 步到达状态 r,再由状态 r 出发经过 l 步到达状态 j. 由马尔可夫性,后一阶段的状态转移与前一阶段的状态转移独立,故两个阶段的转移概率是相乘的关系. 而经过 k 步所到达的状态 r 不受任何限制,因此要对全部的 r 求和.

C-K 方程的证明对研究马尔可夫链是十分典型的. 它的证明过程是: 先按某种方式分解事件(C-K 方程证明中是按时刻 n 的状态分解的),然后利用条件概率的乘法公式、马尔可夫性与齐性进行证明. 今后其它问题的证明基本上也是这一模式,读者应努力掌握它.

2. 对于齐次马尔可夫链,其初始分布与有限维分布有何关系?

答 首先,设 $\{X_n, n\in T\}$ 为齐次马尔可夫链,则它的有限维分布函数由其初始分布与一步转移概率唯一决定. 因为由全概率公式与马尔可夫性,有

$$
\begin{aligned}
&P\{X_1 = i_1, X_2 = i_2, \cdots, X_n = i_n\} \\
&= P\{\bigcup_{i\in I} X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\} \\
&= \sum_{i\in I} P\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\} \\
&= \sum_{i\in I} P\{X_0 = i_0\} P\{X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0\} \cdots \\
&\quad P\{X_n = i_n \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}\} \\
&= \sum_{i\in I} P\{X_0 = i_0\} P\{X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0\} \cdots \\
&\quad P\{X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\} \\
&= \sum_{i\in I} p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.
\end{aligned}
$$

反之,若一个随机变量序列 $\{X_n, n\in T\}$ 的有限维分布由上式给出,其中 $\{p_i, i\in I\}$ 为一概率分布,p_{ij} 为转移概率,则 $\{X_n, n\in T\}$ 是一马尔可夫链,即有定义中的马尔可夫性等式成立. (p_{ij}) 是其转移概率矩阵,$\{p_j\}$ 是其初始分布.

方法、技巧与典型例题分析

对于齐次马尔可夫链，会求一步和 k 步转移概率、或者转移概率矩阵是十分重要的.

例 1 设有独立重复试验序列 $\{x_n, n\geq 1\}$. 以 $X_n=1$ 记第 n 次试验时事件 A 发生，且 $P\{X_n=1\}=p$；以 $X_n=0$ 记第 n 次试验时事件 A 不发生，且 $P\{X_n=0\}=q=1-p$. 求 k 步转移概率矩阵.

解 $\{X_n, n\geq 1\}$ 是齐次马尔可夫链. 由独立性知

$$P\{X_{n+1}=i_{n+1} \mid X_n=i_n\}=P\{X_{n+1}=i_{n+1}\}.$$

又由重复性知，有

$$p_{ij}=P\{X_n=j\}=\begin{cases} p, & j=1, \\ q, & j=0. \end{cases}$$

故

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{PP}=\begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{(k)}=\overbrace{\boldsymbol{PP}\cdots\boldsymbol{P}}^{k}=\begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix}.$$

例 2 设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 满足例 1 的条件. 若有 $Y_n=\sum_{k=1}^{n} X_k, n\geq 1$，证明：$\{Y_n, n\geq 1\}$ 是齐次马尔可夫链，并求二步转移概率矩阵.

解 因为 $Y_1=X_1=i_1, Y_2=X_1+X_2=i_2, \cdots, Y_n=\sum_{k=1}^{n} X_k=i_n, Y_{n+1}=Y_n+X_{n+1}=i_{n+1}$，所以，$X_{n+1}=Y_{n+1}-Y_n=i_{n+1}-i_n$. 由于 X_{n+1} 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 相互独立，因此

$$\begin{aligned} &P\{Y_{n+1}=i_{n+1} \mid Y_n=i_n, Y_{n-1}=i_{n-1}, \cdots, Y_1=i_1\} \\ &=P\{X_{n+1}=i_{n+1}-i_n \mid Y_n=i_n, Y_{n-1}=i_{n-1}, \cdots, Y_1=i_1\} \\ &=P\{X_{n+1}=i_{n+1}-i_n\}. \end{aligned}$$

同理 $P\{Y_{n+1}=i_{n+1}|Y_n=i_n\}=P\{X_{n+1}=i_{n+1}-i_n\}$.

所以，$\{Y_n,n\geqslant 1\}$是马尔可夫链. 由于$\{X_n,n\geqslant 1\}$是齐次马尔可夫链，故$\{Y_n,n\geqslant 1\}$也是齐次马尔可夫链.

$$p_{ij}=P\{Y_{m+1}=j \mid Y_m=i\}=P\{X_{m+1}=j-i\}$$

$$=\begin{cases} q, & j=i, \\ p, & j=i+1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

故

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} q & p & & & \\ & q & p & & \\ & & q & p & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{(2)}=\boldsymbol{PP}=\begin{bmatrix} q^2 & 2pq & p^2 & & & \\ & q^2 & 2pq & p^2 & & \\ & & q^2 & 2pq & p^2 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

下面的问题即可用例 2 求解. 独立地重复抛掷一枚硬币，每次抛掷出现正面的概率为 p，$0<p<1$，出现反面的概率为 $q=1-p$. 令 Y_n 是前 n 次抛掷出正面的总次数($n\geqslant 1$)，则$\{Y_n,n\geqslant 1\}$是一个齐次马尔可夫链，其一步与二步转移概率矩阵如例 2 所述.

例 3 设$\{X_n,n\in T\}$是一个马尔可夫链，其状态空间 $I=\{a,b,c\}$，转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix},$$

求：(1) $P\{X_1=b,X_2=c,X_3=a,X_4=c,$
$X_5=a,X_6=c,X_7=b|X_0=c\}$；

(2) $P\{X_{n+2}=c|X_n=b\}$.

解 (1)由马尔可夫性与齐次性，可得

$$
\begin{aligned}
P =& P\{X_1 = b \mid X_0 = c\}P\{X_2 = c \mid X_1 = b\} \\
& \cdot P\{X_3 = a \mid X_2 = c\}P\{X_4 = c \mid X_3 = a\} \\
& \cdot P\{X_5 = a \mid X_4 = c\}P\{X_6 = c \mid X_5 = a\} \\
& \cdot P\{X_7 = b \mid X_6 = c\} \\
=& \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{2\,500}.
\end{aligned}
$$

(2) 因为所求为二步转移概率,先求二步转移概率矩阵

$$
\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{PP} = \begin{bmatrix} 17/30 & 9/40 & 5/24 \\ 8/15 & 3/10 & 1/6 \\ 17/30 & 3/20 & 17/90 \end{bmatrix},
$$

故 $P\{X_{n+2} = c \mid X_n = b\} = [P\{X_{n+1} = c \mid X_n = b\}]^2 = \frac{1}{6}$.

例 4 设有 1,2,…,6 共六个数字,从中随机地取一个,取中的数字用 X_1 表示,对 $n>1$,令 X_n 是从 $1,2,\cdots,X_{n-1}$ 这 X_{n-1} 个数字中取中的数字.证明:$\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是一个马尔可夫链,求其状态空间 E 及一步和二步转移概率矩阵.

解 状态空间 $E=\{1,2,\cdots,6\}$.任取 $n\geqslant 1, i_1, i_2, \cdots, i_n \in E$,要使 $P\{X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1}, \cdots, X_1=i_1\}>0$,应有 $i_1\geqslant i_2\geqslant\cdots\geqslant i_n$,此时

$$
\begin{aligned}
& P\{X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1\} \\
=& \frac{1}{i_{n-1}} = P\{X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\}.
\end{aligned}
$$

一步和二步转移概率矩阵为

$$
\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & & \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & & & \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & & \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix},
$$

$$P^{(2)} = PP = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 3/4 & 1/4 & & & & \\ 11/18 & 5/18 & 1/9 & & & \\ 25/48 & 13/48 & 7/48 & 1/16 & & \\ 137/300 & 77/300 & 47/300 & 9/100 & 1/25 & \\ 49/120 & 29/120 & 19/120 & 37/360 & 11/180 & 1/36 \end{bmatrix}.$$

例 5(天气预报问题) 设明天是否有雨仅与今天的天气有关,而与过去的天气无关. 又设今天下雨而明天也下雨的概率为 α,而今天无雨明天有雨的概率为 β;规定有雨天气为状态 0,无雨天气为状态 1. 因此问题是两个状态的马尔可夫链. 设 $\alpha=0.7,\beta=0.4$,求今天有雨且第四天仍有雨的概率.

解 由题设条件,得一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix},$$

于是,二步转移概率矩阵为

$$P^{(2)} = PP = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{bmatrix};$$

四步转移概率矩阵为

$$P^{(4)} = P^{(2)}P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{bmatrix}.$$

从而得到今天有雨且第四天仍有雨的概率为

$$p_{00}^{(4)} = 0.5749.$$

例 6 一质点沿标有整数的直线游动. 设经一步由点 i 移到点 $i-1$ 的概率为 p,留在点 i 的概率为 q,移到点 $i+1$ 的概率为 r,且 $p+q+r=1$,求一步转移概率矩阵与二步转移概率矩阵.

解 依题意,有

$$p_{i\,j-1}=p, \quad p_{i\,j}=q, \quad p_{i\,j+1}=r,$$

且 $$p_{ij}=0, \quad j<i-1(\text{或 } j>i+1).$$

于是 $$\boldsymbol{P}=(p_{ij}),\ \boldsymbol{P}^{(2)}=(p_{ij}^{(2)}),$$

其中 $$p_{ij}=\begin{cases}0, & j<i-1,\\ p, & j=i-1,\\ q, & j=i,\\ r, & j=i+1,\\ 0, & j>i+1.\end{cases}$$

由二步转移概率的性质 $p_{ij}^{(2)}=\sum\limits_{k=1}p_{ik}p_{kj}$，得

$$p_{ij}^{(2)}=\begin{cases}0, & j<i-2,\\ p^2, & j=i-2,\\ 2pq, & j=i-1,\\ q^2+2pr, & j=i,\\ 2rq, & j=i+1,\\ r^2, & j=i+2,\\ 0, & j>i+2.\end{cases}$$

例 7 设有一质点在直线上作随机游动，其状态空间 $I=\{0,1,2,\cdots,m\}$. 质点经一步自点 i 移到点 $i+1$ 的概率为 p，自点 i 移到点 $i-1$ 的概率为 $q=1-p$，$1\leqslant i\leqslant m-1$. 状态 $0,m$ 为吸收态(若质点到达 $X_n=0$ 时，X_{n+1}就停留在零状态，则称此状态为吸收态). 求其转移概率矩阵.

解 $\{X_n,n\geqslant 0\}$是一齐次马尔可夫过程. 其一步转移概率为

$$p_{i\,i+1}=p,\quad 1\leqslant i\leqslant m-1,$$

$$p_{i\,i-1}=q,\quad 1\leqslant i\leqslant m-1,$$

$$p_{ij}=0,\quad j\neq i-1 \text{ 和 } i+1,\ 1\leqslant i\leqslant m-1,$$

$$p_{00}=p_{mm}=1.$$

由于吸收态 $0,m$ 是状态空间的两个端点，故称此种过程为有两个吸收壁的随机游动. 状态 i 为马尔可夫链的吸收态的充要条件是 $p_{ii}=1$. 其一步转移概率矩阵是$(m+1)\times(m+1)$矩阵

$$
\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & & & & & \\
q & 0 & p & & & & \\
 & q & 0 & p & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & q & 0 & p & \\
 & & & & q & 0 & p \\
 & & & & & 0 & 1
\end{bmatrix}.
$$

例 8 甲乙两人进行一种比赛,设每局比赛甲胜的概率是 p,乙胜的概率是 q,和局的概率为 r,且 $p+q+r=1$. 设每局比赛胜者记 1 分,负者记 -1 分,和局记零分. 当有一人获得 2 分时比赛结束. 以 X_n 表示比赛至 n 局时甲获得的分数,则 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是齐次马尔可夫链.

(1) 写出状态空间 I;(2) 求出二步转移概率矩阵;

(3) 求甲已获 1 分时,再赛两局可以结束比赛的概率.

解 (1) $I=\{-2,-1,0,1,2\}$.

(2) 显然,转移概率矩阵

$$
\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q & r & p & 0 & 0 \\
0 & q & r & p & 0 \\
0 & 0 & q & r & p \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{P}^{(2)}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}
=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q+rp & r^2+pq & 2pr & p^2 & 0 \\
q^2 & 2rq & r^2+2pq & 2pr & p^2 \\
0 & q^2 & 2qr & pq+r^2 & p+pr \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}.
$$

(3) 经二局结束比赛包括两种情形:甲得 1 分经二步转移至得 2 分而结束比赛,或甲得 1 分经二步转移至得 -2 分(乙得 2 分)而结束比赛. 因此,有

$$p = p_{45} + p_{41} = (p + rp) + 0 = p(1 + r).$$

在解此题时，读者常常会漏掉第二种情形. 尽管本题中第二种情形概率为零，但我们必须学会全面、准确地分析问题.

例 9（$M/G/1$ 排队系统） 顾客到只有 1 个服务员的服务站是参数为 λ 的泊松过程，服务员闲着则立即为顾客服务，否则需排队等待. 设每名顾客接受服务时间是独立的随机变量，有共同分布 G，且与到来过程独立. 字母 M 代表顾客的到来间隔是指数分布，G 代表服务时间分布，1 代表只有 1 个服务员. 若以 X_n 记第 n 个顾客走后剩下的顾客数，$n \geqslant 1$，求转移概率.

解 已知 X_n 表示第 n 个顾客走后剩下的顾客数，$n \geqslant 1$，再令 Y_n 为第 $n+1$ 个顾客接受服务期间来到的顾客数，则

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_{n-1} + Y_n, & X_n > 0, \\ Y_n, & X_n = 0. \end{cases}$$

由于 $Y_n, n \geqslant 1$ 代表在不相重叠的服务时间内顾客来到的人数，来到过程又服从泊松过程，所以 $Y_n, n \geqslant 1$ 是独立同分布的，有

$$P\{y_n = j\} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \mathrm{d}G(x), \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

从而由 X_{n+1} 的结构与上式知 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是马尔可夫链. 转移概率为

$$p_{0j} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \mathrm{d}G(x), \quad j \geqslant 0.$$

$$p_{ij} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} \mathrm{d}G(x), \quad j \geqslant i-1, i \geqslant 1,$$

$$p_{ij} = 0, \quad \text{其它}.$$

注意 若以 X_t 表示时刻 t 系统中的顾客人数，则 $\{X_t, t \geqslant 0\}$ 不具备马尔可夫性. 已知系统在时刻 t 的人数，要预测未来，虽然不用关心最近一名顾客到达后已过去的时刻，但要注意已接受服务的顾客及其已接受服务的时间（因为 G 不是指数分布，不具备无记忆性，所以已服务的时间与离去时间有关）. 因此，对具体问题

应选择适当的 X_n,使可以直接或间接得到一个马尔可夫链.

例 10 A 种啤酒的广告改变广告方式后经市场调查发现:买 A 种啤酒及另三种啤酒 B,C,D(设市场上只有这四种啤酒)的顾客每两个月的平均转移率如下:

A→A(95%)→B(2%)→C(2%)→D(1%),

B→A(30%)→B(60%)→C(6%)→D(4%),

C→A(20%)→B(10%)→C(70%)→D(0%),

D→A(20%)→B(20%)→C(10%)→D(50%).

设目前购买 A,B,C,D 四种啤酒的顾客的分布为(25%,30%,35%,10%),求半年后 A 种啤酒占有的市场份额.

解 因为,转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.95 & 0.02 & 0.02 & 0.01\\ 0.30 & 0.60 & 0.06 & 0.04\\ 0.20 & 0.10 & 0.70 & 0.00\\ 0.20 & 0.20 & 0.10 & 0.50\end{bmatrix},$$

再令 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)=(0.25,0.30,0.35,0.10)$.

半年以后顾客的转移概率矩阵为 $\boldsymbol{P}^{(3)}$,而

$$\boldsymbol{P}^{(3)}=\boldsymbol{P}^3=\begin{bmatrix}0.8894 & 0.8894 & 0.8894 & 0.8894\\ 0.60175 & 0.60175 & 0.60175 & 0.60175\\ 0.4834 & 0.4834 & 0.4834 & 0.4834\\ 0.5009 & 0.5009 & 0.5009 & 0.5009\end{bmatrix}.$$

因为只关心从 A,B,C,D 四种啤酒经三次转移后转到 A 种的概率,所以由 $\boldsymbol{P}^{(3)}$ 的第一列,得

$$P=(0.25,0.30,0.35,0.10)\begin{bmatrix}0.8894\\ 0.60175\\ 0.4834\\ 0.5009\end{bmatrix}\approx 0.624.$$

所以 A 种啤酒在半年后占有的市场份额为 62.4%,广告的效益很好.

例 11 设$\{Y_k,k\geqslant 1\}$是一个独立同分布的取非负整数的随机变量序列，$P\{Y_k=i\}=a_i\ (i\geqslant 0)$. 令 $X_n=\left(\sum_{k=1}^{n}Y_k\right)^2,n\geqslant 1$，证明：$\{X_n,n\geqslant 0\}$是马尔可夫链，并求其一步转移概率矩阵.

解 X_n 的值域为$\{0,1,2^2,3^2,\cdots\}=E$，$X_{n+1}=X_n+2\sqrt{X_n}Y_{n+1}+Y_{n+1}^2,n\geqslant 1$. 有

$$
\begin{aligned}
&P\{X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_n=i_n,X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_1=i_1\}\\
&=P\{i_n+2\sqrt{i_n}Y_{n+1}+Y_{n+1}^2=i_{n+1}\}\\
&=P\{X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_n=i_n\},
\end{aligned}
$$

所以，$\{X_n,n\geqslant 1\}$是马尔可夫链. 转移概率

$$
\begin{aligned}
&p_{ij}=P\{i+2\sqrt{i}\,Y_1+Y_1^2=j\}=a_{\sqrt{j}-\sqrt{i}}\quad (i,j\in E,j\geqslant i),\\
&p_{ij}=0\quad (j<i).
\end{aligned}
$$

故，转移概率矩阵为

$$
\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & & \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \\
 & & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}.
$$

例 12 设马尔可夫链$\{X_n,n\geqslant 0\}$的状态空间 $I=\{0,1\}$. 转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{00} & p_{01}\\ p_{10} & p_{11}\end{bmatrix}$.

(1) 设$|p_{00}+p_{11}-1|<1$，用数学归纳法证明：

$$
\boldsymbol{P}^{(n)}=\frac{1}{2-p_{00}-p_{11}}\begin{bmatrix}1-p_{11} & 1-p_{00}\\ 1-p_{11} & 1-p_{00}\end{bmatrix}
+\frac{(p_{00}+p_{11}-1)^n}{2-p_{00}-p_{11}}\begin{bmatrix}1-p_{00} & -(1-p_{00})\\ -(1-p_{11}) & 1-p_{11}\end{bmatrix}\ (n\geqslant 1);
$$

(2) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}p_{00}^{(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}p_{10}^{(n)}=\dfrac{1-p_{11}}{2-p_{00}-p_{11}}$，

$$\lim_{n\to\infty} p_{01}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = \frac{1-p_{00}}{2-p_{00}-p_{11}}.$$

证 (1) 因为 $\boldsymbol{P}^{(2)}=\boldsymbol{PP}$,所以

$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} p_{00}^2 + p_{01}p_{10} & p_{00}p_{01} + p_{01}p_{11} \\ p_{10}p_{00} + p_{11}p_{10} & p_{10}p_{01} + p_{11}p_{11} \end{bmatrix}.$$

当 $n=1$ 时,$\sum_{k=0}^{1} p_{ik} = 1\ (i=0,1)$,得

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2-p_{00}-p_{11}}\begin{bmatrix} 1-p_{11} & 1-p_{00} \\ 1-p_{11} & 1-p_{00} \end{bmatrix} + \frac{p_{00}+p_{11}-1}{2-p_{00}-p_{11}}\begin{bmatrix} 1-p_{00} & -(1-p_{00}) \\ -(1-p_{11}) & 1-p_{11} \end{bmatrix}.$$

设当 $n=k$ 时,结论成立.那么当 $n=k+1$ 时,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{(k+1)} = \boldsymbol{P}^{(k)}\boldsymbol{P} &= \frac{1}{2-p_{00}-p_{11}}\begin{bmatrix} 1-p_{11} & 1-p_{00} \\ 1-p_{11} & 1-p_{00} \end{bmatrix}\boldsymbol{P} \\ &\quad + \frac{(p_{00}+p_{11}-1)^k}{2-p_{00}-p_{11}}\begin{bmatrix} 1-p_{00} & -(1-p_{00}) \\ -(1-p_{11}) & 1-p_{11} \end{bmatrix}\boldsymbol{P} \\ &= \frac{1}{2-p_{00}-p_{11}}\begin{bmatrix} 1-p_{11} & 1-p_{00} \\ 1-p_{11} & 1-p_{00} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{(p_{00}+p_{11}-1)^{k+1}}{2-p_{00}-p_{11}}\begin{bmatrix} 1-p_{00} & -(1-p_{00}) \\ -(1-p_{11}) & 1-p_{11} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

故结论成立.

(2) 因为 $|p_{00}+p_{11}-1|<1$,故 $|p_{00}+p_{11}-1|^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. 在 $\boldsymbol{P}^{(k+1)}$ 式中,令 $k\to\infty$ 即得

$$\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{10}^{(n)} = \frac{1-p_{11}}{2-p_{00}-p_{11}},$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{01}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = \frac{1-p_{00}}{2-p_{00}-p_{11}}.$$

例 13(随机游动问题) 随机游动是马尔可夫链的典型例子,

例 6、例 7 都是随机游动的例子. 随机游动的统计特性由它在边界的行为所决定. 常见的随机游动有以下几种：

(1) $I=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，在 $\pm\infty$ 的边界上没有任何限制，称为**自由随机游动**. 一步转移概率为

$$p_{i\,i-1}=p,\ p_{i\,i+1}=q=1-p,\ i\in I,\ 0<p<1.$$

其余的 $p_{ij}=0$. 一步转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & p & 0 & q & & & \\ & & p & 0 & q & & \\ & & & p & 0 & q & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix}.$$

(2) $I=\{0,1,2,\cdots\}$，$p_{00}=1$，称之为**有一个吸收壁(状态 0)的随机游动**. 一步转移概率为

$$p_{i\,i-1}=p,\ p_{i\,i+1}=q=1-p,i\geqslant 1,\ p_{00}=1,$$

其余 $p_{ij}=0$. 一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & & & \\ p & 0 & q & & \\ & p & 0 & q & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix}.$$

(3) $I=\{0,1,\cdots,n\}$，$p_{00}=1$，$p_{nn}=1$，称之为**有两个吸收壁**(状态 0 和 n)的随机游动. 一步转移概率为

$$p_{i\,i-1}=p,\ p_{i\,i+1}=q=1-p,1\leqslant i\leqslant n-1,\ p_{00}=1,\ p_{nn}=1,$$

其余 $p_{ij}=0$. 一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & & & & \\ p & 0 & q & & & \\ & p & 0 & q & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & p & 0 & q \\ & & & & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(4) $I=\{0,1,2,\cdots\}$，$p_{00}=0$，$p_{01}=1$，称之为**有一个反射壁(状态 0)的随机游动**. 一步转移概率为

$$p_{i\,i-1}=p,p_{i\,i+1}=q=1-p,i\geqslant 1,\ p_{00}=0,\ p_{01}=1,$$

其余 $p_{ij}=0$. 一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ p & 0 & q & & \\ & p & 0 & q & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

(5) $I=\{0,1,2,\cdots\}$，$p_{00}=\alpha$，$p_{01}=\beta(\alpha+\beta=1)$，$0<\alpha<1$，称之为**有一个弹性壁(状态 0)的随机游动**. 一步转移概率为

$$p_{i\,i-1}=p,\ p_{i\,i+1}=q=1-p,i\geqslant 1,\ p_{00}=\alpha,\ p_{01}=\beta,$$

其余 $p_{ij}=0$. 一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta & & & \\ p & 0 & q & & \\ & p & 0 & q & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

(6) $I=\{0,1,\cdots,n\}$，$p_{00}=0$，$p_{01}=1$，$p_{nn}=0$，$p_{nn-1}=1$，称之为**有两个反射壁(状态 0 和 n)的随机游动**. 一步转移概率为

$$p_{i\,i-1}=p,\quad p_{i\,i+1}=q=1-p,\quad 1\leqslant i\leqslant n-1,$$

$$p_{00}=1,\quad p_{01}=1,\quad p_{nn}=0,\quad p_{n\,n-1}=1,$$

其余 $p_{ij}=0$. 一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ p & 0 & q & & & \\ & p & 0 & q & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & p & 0 & q \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(7) $I=\{0,1,\cdots,n\}$，$p_{00}=\alpha$；$p_{01}=\beta$，$0<\alpha<1(\alpha+\beta=1)$；$p_{nn}=\delta$，$p_{n\,n-1}=\gamma$，$0<\delta<1(\gamma+\delta=1)$，称之为**有两个弹性壁(状态 0 和**

n)**的随机游动**. 一步转移概率为

$$p_{i\,i-1}=p,\ p_{i\,i+1}=q=1-p, 1\leqslant i\leqslant n-1,$$
$$p_{00}=\alpha,\ p_{01}=\beta,\ p_{nn}=\delta,\ p_{n\,n-1}=\gamma,$$

其余 $p_{ij}=0$. 一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & & & & \\ p & 0 & q & & & \\ & p & 0 & q & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & p & 0 & q \\ & & & & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

若$\{Y_k,k\geqslant 0\}$是独立随机序列,具有如下相同分布:$P\{Y_k=1\}=p, P\{Y_k=-1\}=q=1-p$, $k=0,1,\cdots$. 令 $X_n=\sum\limits_{k=0}^{n}Y_k$, 则称$\{X_n,n\geqslant 0\}$是广义随机游动的.

第三节　马尔可夫链的状态分类

主 要 内 容

本节只讨论齐次马尔可夫链$\{X_n,n\geqslant 0\}$,状态空间 $I=\{0,1,2,\cdots\}$,一步转移概率为 p_{ij}, $i,j\in I$.

一、状态的分类

1. 如果集合$\{n:n\geqslant 1, p_{ii}^{(n)}>0\}$非空,则称该集合的最大公约数 $d=d(i)=\text{G. C. D}\{n:p_{ii}^{(n)}>0\}$为**状态 i 的周期**. 如 $d>1$,则称 i 为周期的;如 $d=1$,则称 i 为非周期的.

2. 如 i 的周期为 d,则存在正整数 M,对一切 $n\geqslant M$,有 $p_{ii}^{(nd)}>0$.

3. 设 $i,j\in I$,如果存在一个正整数 n,使 $p_{ij}^{(n)}>0$,则称**状态 i 可达状态 j**,记为 $i\to j$.

若对一切正整数n，都有$p_{ij}^{(n)}=0$，则称**状态i不可达j**，记为$i \nrightarrow j$.

4. 设$i,j\in I$，如果$i\rightarrow j$且$j\rightarrow i$，则称**状态i和j是相通的**，记为$i\leftrightarrow j$.

5. 可达关系与相通关系具有传递性，即

若$i\rightarrow j, j\rightarrow k$，则$i\rightarrow k$；　若$i\leftrightarrow j, j\leftrightarrow k$，则$i\leftrightarrow k$.

这一结论可以推广到有任意多个状态的情形.

6. 设$P\{X_0=i\}>0, i\in I$，则

$$\begin{aligned} f_{ij} &\triangleq P\{T_{ij}=n \mid X_0=i\} \\ &= P\{X_n=j, X_k\neq j,\ k=1,2,\cdots,n-1 \mid X_0=i\} \end{aligned}$$

称为从**自状态i出发，经n步首次转移到达状态j的概率，简称首达概率**.

这里，设$X_0=i, i\in I$，$T_{ij}=\min\{n \mid X_0=i, X_n=j\}$称为从状态出发首次进入$j$的时刻. 如果$P\{X_0=i\}=0$或$i\nrightarrow j$，则规定$T_{ij}=\infty$. 在通常情况下，$T_{ij}$是一个随机变量.

(1) 首达概率可以用一步概率表示，即

$$f_{ij}^{(n)}=\sum_{i_1\neq j}\sum_{i_2\neq j}\cdots\sum_{i_k\neq j} p_{i i_1} p_{i_1 i_2}\cdots p_{i_{n-1} j}.$$

(2) 对任意正整数n，首达概率与n步转移概率之间有关系

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{ij}^{(n-l)}=\sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(n-l)} p_{ij}^{(l)},\ 1\leqslant n<\infty.$$

7. $f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 称为**从状态i出发，迟早要进入状态j的概率**. 有

$$0\leqslant f_{ij}^{(n)}\leqslant f_{ij}\leqslant 1,\quad i,j\in I.$$

当$j=i$时，T_{ii}是**从i出发，首次返回i的时刻**；f_{ii}是**从状态i出发，迟早要返回状态i的概率**.

(1) $f_{ij}>0$的充要条件是$i\rightarrow j$；

(2) $f_{ij}>0$和$f_{ji}>0$的充要条件是$i\leftrightarrow j$.

8. 如果$f_{ij}=1$，则称状态i是**常返态**；如果$f_{ii}<1$，则称状态i

是非常返(或滑过)**态**.

对常返态 i,由定义知$\{f_{ii}^{(n)}, n\geqslant 1\}$构成一概率分布,其期望值 $\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{ii}^{(n)}$ 表示**由 i 出发再返回到 i 的平均返回时间**.

若 $\mu_i<\infty$,则称常返态 i 为**正常返态**;若 $\mu_i=\infty$,则称常返态 i 为**零常返态**. 非周期的正常返态称为**遍历状态**.

9. G.C.D$\{n:n\geqslant 1, p_{ii}^{(n)}>0\}$=G.C.D$\{n:n\geqslant 1, f_{ii}^{(n)}>0\}$.

二、常返性判别

1. 状态 i 是常返态的充要条件是 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\infty$. 若状态 i 是非常返态,则 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=1/(1-f_{ii})$.

(1) 状态 j 是非常返态的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}<\infty$. 若状态 j 是非常返态,则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0$.

(2) 若状态 j 是非常返态,则对任意 $i\in I$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$.

2. 若状态 i 是常返态,则它是零常返态的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$;若 j 是零常返态,则对于任意 $i\in I$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$.

3. 若 $i\leftrightarrow j$,则它们同为常返态或非常返态;若 i,j 同为常返态,则它们同为正常返态或零常返态,且 i,j 有相同的周期.

4. 状态 i 是遍历状态的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=1/\mu_i>0$. 一个不可约的、非周期的、有限状态的马尔可夫链是遍历的.

疑 难 解 析

1. 为什么要对马尔可夫链的状态进行分类?

答 对齐次马尔可夫链代表的系统进行研究时通常要讨论两类问题:一是瞬态分析;二是稳态分析. 瞬态分析讨论的是,在某一固定时刻 n 时系统的概率特性,即求 n 步转移概率或绝对概率

$p_j(n)=P\{X_n=j\}$. 稳态分析是讨论当 $n\to\infty$(或 n 充分大)后系统的概率特性，即当 $n\to\infty$时，$p_{ij}^{(n)}$ 的极限是否存在，若存在又与状态的关系如何，极限概率能否构成概率分布. 要解决这两类问题，就需要对状态进行分类，并对状态空间进行分解(将在下节讨论).

2. 为什么当 $i\leftrightarrow j$ 时，有 $d(i)=d(j)$?

答 因为 $i\leftrightarrow j$，即存在 m,n，使 $p_{ij}^{(m)}>0,p_{ji}^{(n)}>0$，于是

$$p_{ii}^{(m+n)}=\sum_{k\in I}p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(n)}\geqslant p_{ij}^{(m)}p_{ji}^{(n)}>0.$$

设有 s 使 $p_{ji}^{(s)}>0$，则

$$p_{ii}^{(n+s+m)}\geqslant p_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(s)}p_{ji}^{(s)}>0.$$

而 $d(i)$应能同时整除 $n+m$ 和 $n+m+s$，故必整除 s. 又$d(j)$是 j 的周期，所以 $d(i)$也整除 $d(j)$. 反过来同样可以证明$d(j)$能整除 $d(i)$，于是得到 $d(i)=d(j)$.

方法、技巧与典型例题分析

通过本节学习，要求读者能对状态进行分类，确定是否常返态或遍历态，并能求出周期. 要解决这些问题，必须十分熟悉定义与定理，并能由一步转移概率矩阵画出状态传递图.

例 1 设 $I=\{0,1,2\}$，一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 1/3 & 2/3\end{bmatrix}.$$

画出状态传递图并分析各状态间关系

解 状态传递图如图 3.1 所示.

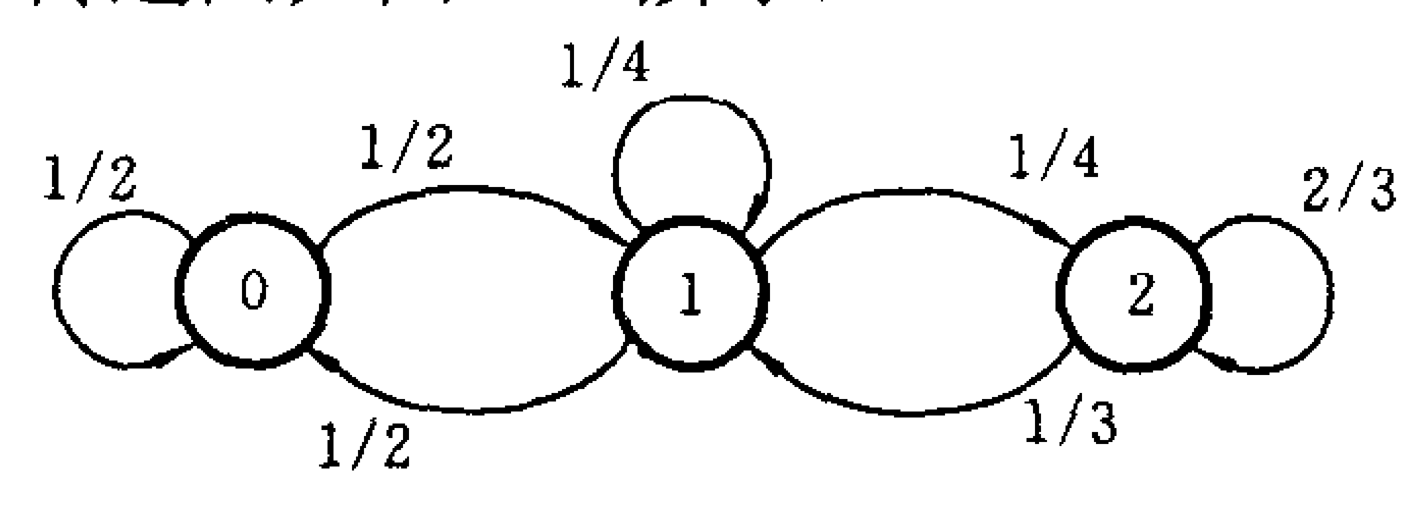


图 3.1

由状态 0 可达状态 2，$⓪\xrightarrow{1/2}①\xrightarrow{1/4}②$；

由状态 2 可达状态 0，$②\xrightarrow{1/3}①\xrightarrow{1/2}⓪$.

例 2 一个状态空间为 $I=\{0,1,2,3\}$ 的马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

试对其状态进行分类.

解 这是一个有限状态的马尔可夫链，所有状态都是相通的，因此所有状态均为常返态. 其状态传递图如图 3.2 所示.

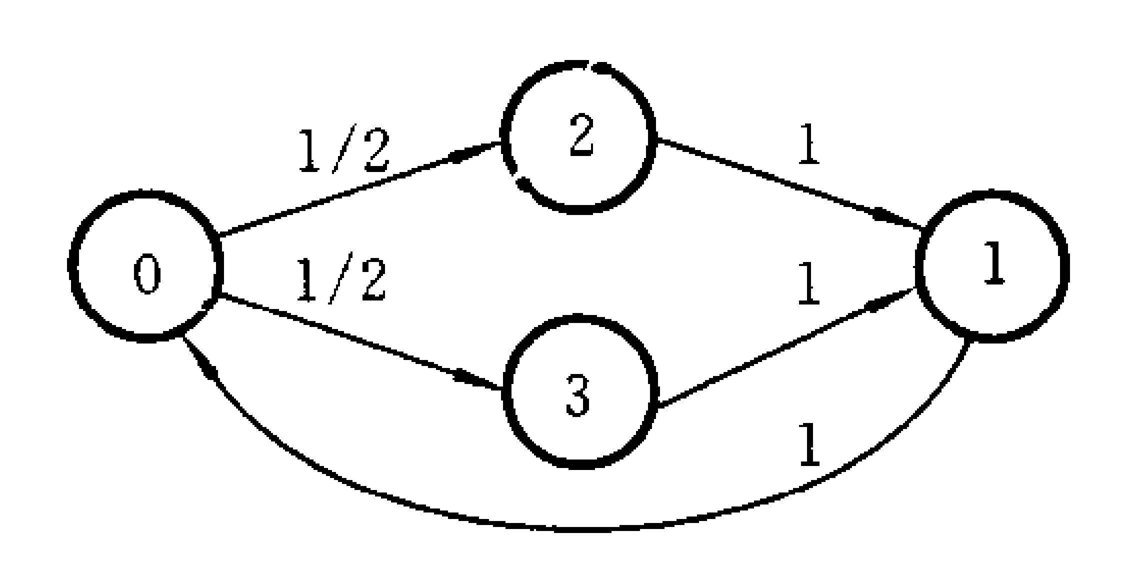


图 3.2

例 3 设 $I=\{1,2,3,4\}$，其一步转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0\end{bmatrix},$$

试对其状态进行分类，确定哪些状态是常返态，并确定其周期.

解 画状态传递图如图 3.3 所示.

图 3.3

因为对一切 $n\geqslant 1$，$f_{44}^{(n)}=0$，所以 $f_{44}=0<1$. 从而知状态 4 是非常返态. 又

$$f_{33}^{(1)}=\frac{2}{3},\quad f_{33}^{(n)}=0\ (n\geqslant 2),$$

所以 $f_{33}=\dfrac{2}{3}<1$. 从而知状态 3 也是非常返态.

而 $$f_{11}=f_{11}^{(1)}+f_{11}^{(2)}=1/2+1/2=1,$$

$$f_{22}=f_{22}^{(1)}+f_{22}^{(2)}+\cdots=0+1/2+1/2^2+\cdots=1,$$

所以状态 1 和状态 2 是常返态. 又知

$$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}^{(n)}=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<+\infty,$$

$$\mu_2=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{22}^{(n)}=1\cdot 0+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots=3<+\infty,$$

而其周期均为 1,故状态 1 与状态 2 是正常返态,且为遍历态.

例 4 设马尔可夫链的状态空间 $I=\{0,1,\cdots\}$,其转移概率为 $p_{i\,i+1}=1/2,p_{i0}=1/2,\ i=0,1,2,\cdots$. 试画出状态传递图并对状态分类.

解 状态传递图如图 3.4 所示.

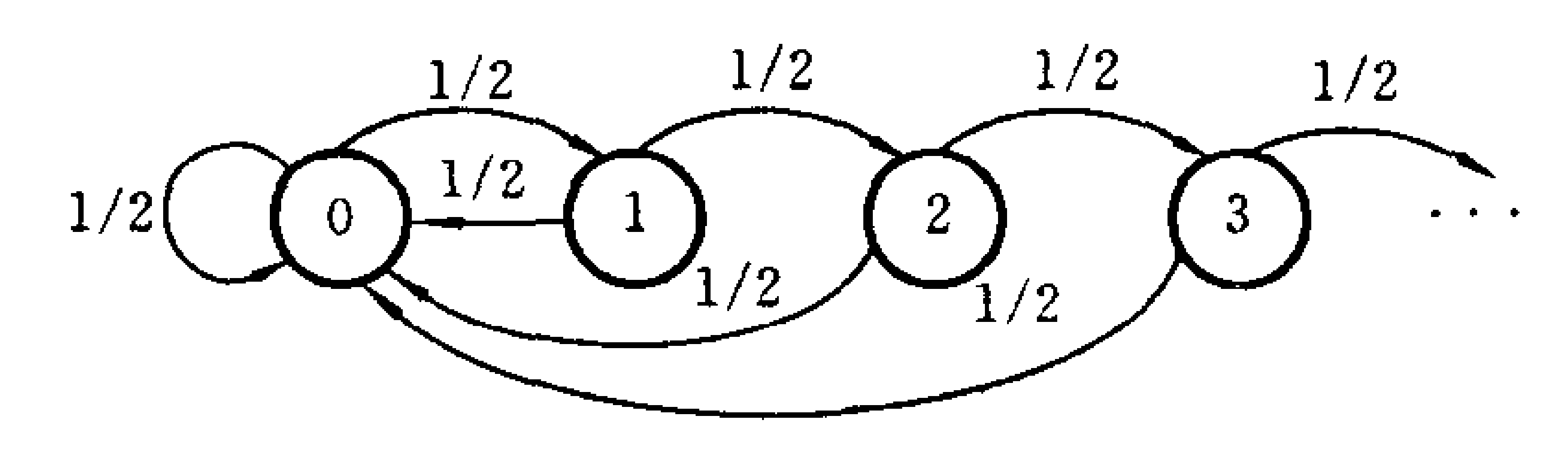


图 3.4

$$f_{00}=\sum_{n=0}^{\infty}f_{00}^{(n)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1,$$ 故状态 0 是常返态.

又任一状态 i 都与 0 相通,所以由判别准则,任一状态 i 都是常返态. 而 $\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{1}{2^n}<\infty$,所以状态 0 是常返态;又 $p_{00}=\frac{1}{2}>0$,故状态 0 是非周期的,从而是遍历的,故依判别准则,任一状态 i 都是遍历的.

当状态较多时,逐个对状态进行计算是困难的. 如果状态是相通的,选择其中一个易于识别的状态进行计算和识别,也就识别了其余的状态,从而可以大大减少工作量.

例 5 考察状态传递图(图 3.5)所示马尔可夫链,求其周期.

解 因为从状态 1 出发再回到 1 的可能步长为

$$T=\{4,6,8,10,\cdots\},$$

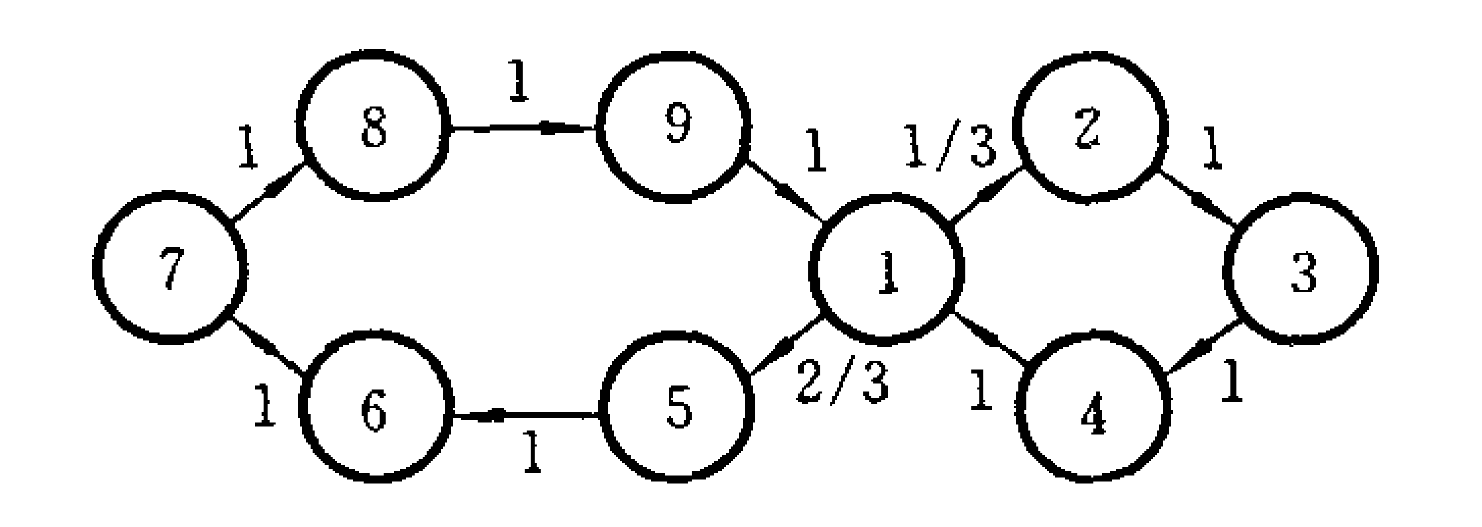


图 3.5

其最大公约数是 2. 虽然从状态 1 出发 2 步不能回到状态 1，但仍然称 2 是状态 1 的周期.

例 6 设直线上的随机游动的状态空间 $I=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，转移概率 $p_{i\,i+1}=1-p_{i\,i-1}=p, i\in I$. 试确定其状态的常返性.

解 对状态 0，因为 $p_{00}^{(2n+1)}=0, n=1,2,\cdots$，所以

$$p_{00}^{(2n)}=C_{2n}^{n}p^{n}(1-p)^{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}[p(1-p)]^{n}.$$

又由斯武林(Stirling)公式可知：当 n 充分大时，$n!\approx n^{n+1/2}\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi}$. 故 $p_{00}^{(2n)}\approx\frac{[4p(1-p)]^{n}}{\sqrt{2\pi}}$，而 $p(1-p)\leqslant\frac{1}{4}$，且 $p(1-p)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow p=\frac{1}{2}$. 从而，当 $p=\frac{1}{2}$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty$，否则 $\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}<\infty$. 即 $p\neq\frac{1}{2}$ 时，状态 0 是非常返态，$p=\frac{1}{2}$ 时状态 0 是常返态.

因为各个状态是相通的，所以依判决准则，各个状态有相同的常返性.

例 7 已知马尔可夫链 $\{X_n, n\geqslant0\}$ 的 $I=\{1,2,3,4\}$，转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的状态转移图如图 3.6 所示，试对状态进行分类.

解 因为 $p_{11}=1/4$，故 $\{n, p_{11}^{(n)}>0\}$ 的最大公约数 $d=1$，所以状态 1 是非周期的. 从而每一状态都是非周期的.

考虑状态 1 是否常返态. 因为 $f_{11}^{(1)}=1/4$，而

$$f_{11}^{(2)}=P\{X_2=1, X_1\neq1\mid X(0)=1\}$$

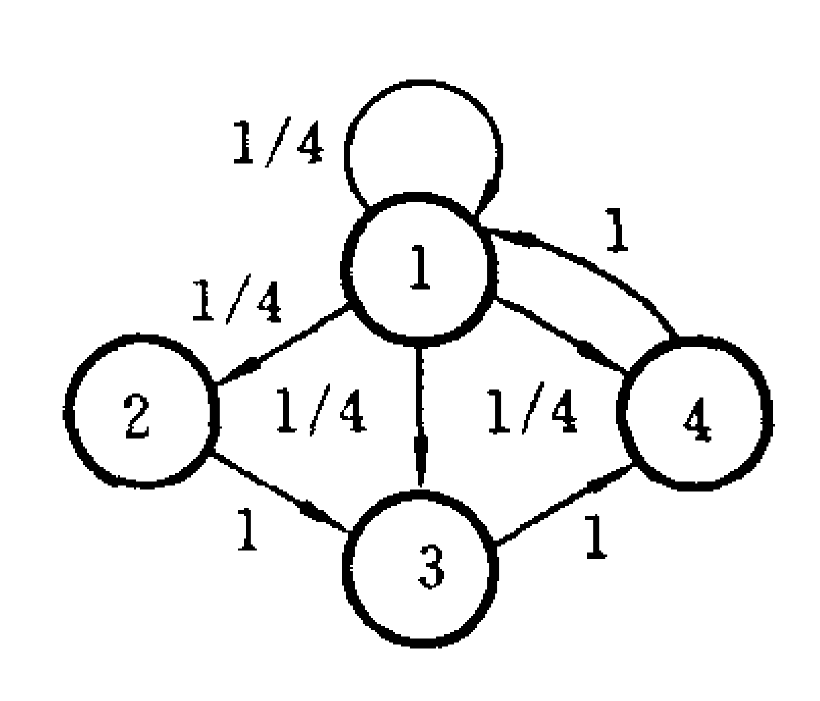


图 3.6

$$=P\{X_2=1,X_1=2|X_0=1\}+P\{X_2=1,X_1=3|X_0=1\}$$
$$+P\{X_2=1,X_1=4|X_0=1\}$$
$$=P\{X_2=1|X_1=4,X_0=1\}P\{X_1=4|X_0=1\}$$
$$=p_{41}p_{14}=\frac{1}{4}.$$

类似可得 $f_{11}^{(3)}=\frac{1}{4}$, $f_{11}^{(4)}=\frac{1}{4}$, $f_{11}^{(n)}=0\ (n\geqslant 5)$.

所以 $$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{11}^{(n)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1,$$

故状态 1 是常返态.

又 $\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}^{(n)}=\frac{5}{2}<\infty$，所以状态 1 是正常返态. 因为各状态相通，依判别准则，所有状态都是正常返的，因而都是遍历的.

例 8 考察生物群体，以 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 记马尔可夫链，则 $I=\{0,1,\cdots\}$. 设 $p_{i\,i+1}=p$, $p_{i\,i-1}=\mu_i(\mu_0=0)$, $p_{ii}=\sigma_i=1-\lambda_i-\mu_i$, $i\geqslant 0$. 令 $X_0=1$, $\lambda_i>0$, $\mu_i>0$，证明：当 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k}=\infty$ 时，X_n（表示在时刻 n 时个体的数目）的所有状态都是常返的.

证 显然，所有状态都是相通的，所以只需考察状态 0. 记对固定的状态 k, $u_i=P\{T_{i0}<T_{ik}|X_0=i\}$，有

$$u_i=\lambda_iu_{i+1}+\mu_iu_{i-1}+(1-\lambda_i-\mu_i)u_i,$$

或 $$u_{i+1}-u_i=\frac{\mu_i}{\lambda_i}(u_i-u_{i-1})=\cdots=\frac{\mu_i\mu_{i-1}\cdots\mu_1}{\lambda_i\lambda_{i-1}\cdots\lambda_1}(\mu_1-\mu_0).$$

令 $\beta_0=1$, $\beta_i=\frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_i}(u_0=0,u_k=0)$. 将上式两边对 $i=0,1,\cdots,k-1$ 求和，得

$$1=(1-u_1)\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i.$$

从而得出 $$u_i=\sum_{j=i}^{k-1}(u_j-u_{j+1})=\sum_{j=i}^{k-1}\beta_j\Big/\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j,$$

故$u_1 = P\{T_{10} < T_{1k} \mid X_0 = 1\} = \sum_{j=1}^{k-1}\beta_j \Big/ \sum_{j=0}^{k-1}\beta_j = 1 - \left(\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j\right)^{-1}$.

由于$\{T_{10}<T_{1k}\}$单调增加并趋向于$\{T_{10}<\infty\}$及条件 $\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j=\infty$，令 $k\to\infty$，则由上式得

$$P\{T_{10} < \infty \mid X_0 = 1\} = f_{10} = 1,$$

所以，由 $$f_{00}=p_{00}+p_{01}f_{10}=\sigma_0+\lambda_0=1$$

知状态 0 是常返的. 如上可知，如 $\mu_i\geqslant\lambda_i>0$，则所证等式成立，所有状态都是常返态. 这一过程称为生灭链.

第四节 状态空间的分解

主要内容

1. 设 C 是状态空间 I 的一个子集，如果对于任意的状态 $i\in C$，状态 $j\notin C$，都有 $p_{ij}=0$（即从状态 i 出发，经一步转移不能到达状态 j），则称 C 是（随机）**闭集**. 如果 C 的状态互通，则称 C 是不可约的. 如果除 I 以外没有其它闭集，则称马尔可夫链是不可约的.

2. C 是闭集的充要条件是：对任意的 $i\in C, j\notin C$，都有 $p_{ij}^{(n)}=0, n\geqslant1$.

3. 任一马尔可夫链的状态空间 I，必可唯一地分解成有限个或可列个互不相交的子集 $N, C_1, C_2, \cdots, C_k, \cdots$的和. 其中

(1) 每一 C_k 是由常返态组成的不可约闭集.

(2) C_k 中的状态同类，或全是正常返态，或全是零常返态，有相同的周期，且 $f_{ij}=1,\ i,j\in C_k$.

(3) N 是所有非常返状态组成的集合.

以上称为马尔可夫链的分解定理.

4. 设 $D\subset I$，如果对 $i\in I$，必存在整数 $n>0$ 及状态 $j\notin D$，使

$p_{ij}^{(n)}>0$，则称 D 为**开集**.

设 $D\subset I$，则称包含 D 的最小闭集为 D 的闭包，记为 $\overline{D}$. 任一状态 i 的闭包 $\{\overline{i}\}=\{i\}\cup\{k: i\rightarrow k\}$.

5. 称矩阵 (a_{ij}) 为**随机矩阵**，如果其元素满足：(1) $a_{ij}\geqslant 0$；(2) 对每一 i，$\sum\limits_j a_{ij}=1$.

显然，k 步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}^{(k)}=(p_{ij}^{(k)})$ 是随机矩阵.

6. 设 C 为闭集，则只在 C 上考虑，矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$，$i,j\in C$ 仍是随机矩阵.

在转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 或 $\boldsymbol{P}^{(k)}=(p_{ij}^{(k)})$ 中，将对应于闭集 C 之外状态的所有行与列都删去，余下的矩阵仍是一转移概率矩阵. 它对应一个状态空间为 C 的马尔可夫链，称为原马尔可夫链的**子马尔可夫链**.

7. 周期为 d 的不可约马尔可夫链，其状态空间 C 可唯一地分解为 d 个互不相交的子集之和，即

$$C=\bigcup_{r=0}^{d-1}G_r,\quad G_r\cap G_s=\varnothing,\ r\neq s.$$

且自 G_r 中任一状态出发，经一步转移必进入 G_{r+1} 中(其中 $G_d=G_0$).

8. 设 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是周期为 d 的不可约马尔可夫链，则有：

(1) 如只在时刻 $0,d,2d,\cdots$ 上考虑 $\{X_n,n\geqslant 0\}$，即得一新的马尔可夫链 $\{X_{nd},n\geqslant 0\}$，其转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}^{(s)}=(p_{ij}^{(s)})$，其分解出的子集 G_r 是不可约闭集，且 G_r 的状态是非周期的.

(2) 若原马尔可夫链 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是常返态的，则 $\{X_{nd},\ n\geqslant 0\}$ 也是常返态的.

9. 不可约马尔可夫链是常返链的充要条件是：方程组 $\boldsymbol{Z}_i=\sum\limits_{j=i}^{\infty}p_{ij}Z_j, i=1,2,\cdots$ 没有非零的有界解.

不可约马尔可夫链是非常返链的充要条件是：方程组 $\boldsymbol{Y}_i=$

$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} Y_i$，$i = 1,2,\cdots$ 有有界的非常数解.

疑 难 解 析

1. 怎样理解状态空间的分解定理?

答 状态空间的分解定理说明:状态空间的状态可按常返态与非常返态分为两类,非常返态组成集合 N,常返态组成一个闭集 C. 闭集 C 又可按相通关系分为若干个互不相交的基本常返闭集 $C_1, C_2, \cdots$.

一个马尔可夫链,如果从 N 中某一非常返态出发,它或者一直停留在 N 中,或者从某一时刻进入某一基本常返闭集 C_k,一旦进入,就永不离开. 一个马尔可夫链,如果从某一常返态出发. 必属于某一常返闭集 C_k,则马尔可夫链将永远停留在这一闭集 C_k 中.

2. 有限马尔可夫链有什么性质?

答 当一个马尔可夫链的状态空间是一个有限集合时,称为有限马尔可夫链. 它有以下性质:

(1) 所有非常返态组成的集合不是闭集. 这可由反证法证明. 因为若是闭集,则对任何 $i \in N$,有 $\sum_{j \in N} p_{ij}^{(n)} = 1$. 但由非常返性,$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$,而要 $0 = \sum_{j \in N} \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 1$ 是不可能的.

(2) 没有零常返态. 同样可用反证法证明.

(3) 必有正常返态. 由转移概率性质,总有 $\sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$. 由于 I 有限,求和号与极限号可以交换,于是

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j \in I} \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 1,$$

说明不可能对一切 j 都有 $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. 若有状态 k 使 $\lim_{n \to \infty} p_{ik}^{(n)} \neq 0$,则状态 k 即为正常返的.

(4) 有限马尔可夫链的状态空间可分解为

$$I=N+C_1+\cdots+C_k,$$

其中 N 为非常返集合，C_i，$i\neq 1,2,\cdots,k$ 是正常返集合.

由(2)和(3)知，I 可分为非常返集 N 和正常返集 C，因为 I 有限，故存在有限数 k，使 $C=C_1+C_2+\cdots+C_k$，而 C_k 是正常返集.

不可约有限马尔可夫链只有正常返态. 因为有限马尔可夫链是不可约的，所以整个状态空间构成唯一的闭集. 而非常返集 N 不是闭集，故只能由正常返态组成闭集，而且只有一个，故必为 $I=C$.

方法、技巧与典型例题分析

本节问题是上一节问题的深化，在对马尔可夫链状态分类的基础上，将状态空间分解.

例 1 设马尔可夫链 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 的状态空间 $I=\{1,2,\cdots,6\}$，转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

试分解此马尔可夫链并求出各状态的周期.

解 状态传递图如图 3.7 所示.

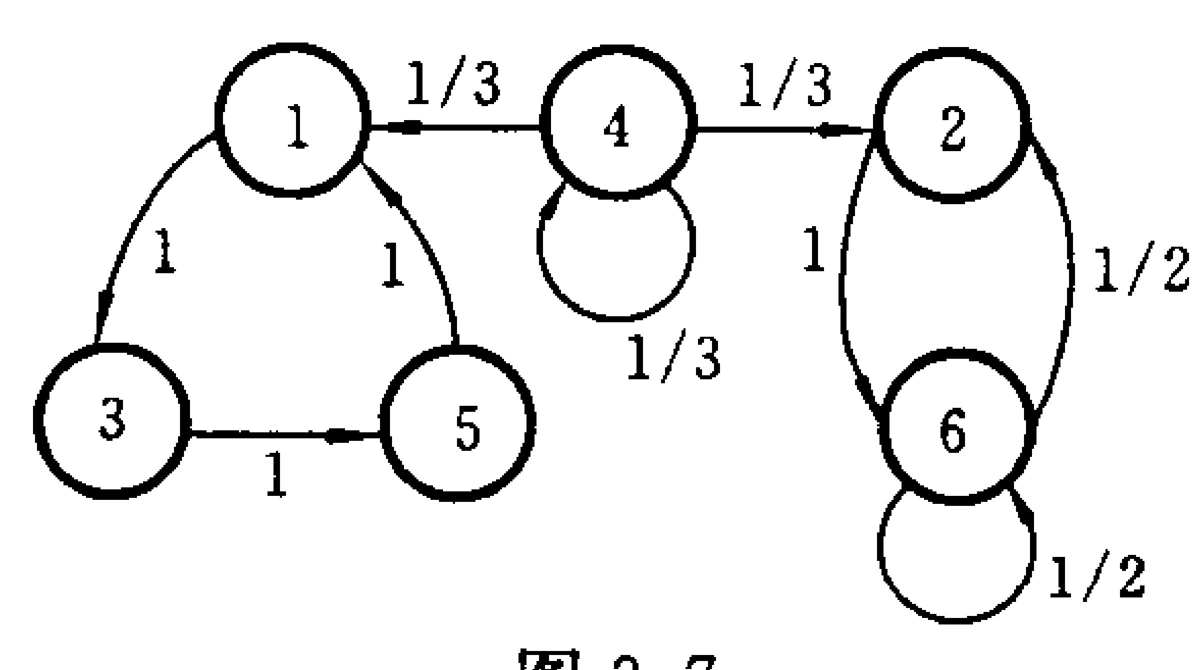


图 3.7

对状态 1，有

$$f_{11}^{(1)}=0, f_{11}^{(2)}=0, f_{11}^{(3)}=1, f_{11}^{(n)}=0\ (n\geqslant 4),$$

故 $f_{11}=1$. 状态 1 为常返态. $\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)}=3$，由状态 1 生成的基本常返闭集为

$$C_1=\{\bar{1}\}=\{1\}\cup\{k:1\to k\}=\{1,3,5\}.$$

类似地，状态 6 也是正常返态，$\mu_6=3/2$，由状态 6 生成的基本闭集 $C_2=\{\bar{6}\}=\{2,6\}$.

$D=\{4\}$是非常返集，从而状态空间

$$I=\{4\}\cup\{1,3,5\}\cup\{2,6\}.$$

由 $f_{11}^{(3)}>0$，故状态 1 周期为 3，从而 C_1 中状态周期均为 3. 又 $f_{66}^{(1)}>0$，故状态 6 是非周期的，即 C_2 中状态是遍历的. 同样，因 $f_{44}^{(1)}>0$，故状态 4 也是非周期的.

例 2 设马尔可夫链$\{X_n, n\geqslant 1\}$的状态空间 $I=\{1,2,3,4\}$，转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

画出状态传递图，并讨论周期性.

解 状态转移图如图 3.8 所示.

$$I=\{1,2\}+\{3,4\}=C_1\cup C_2,$$

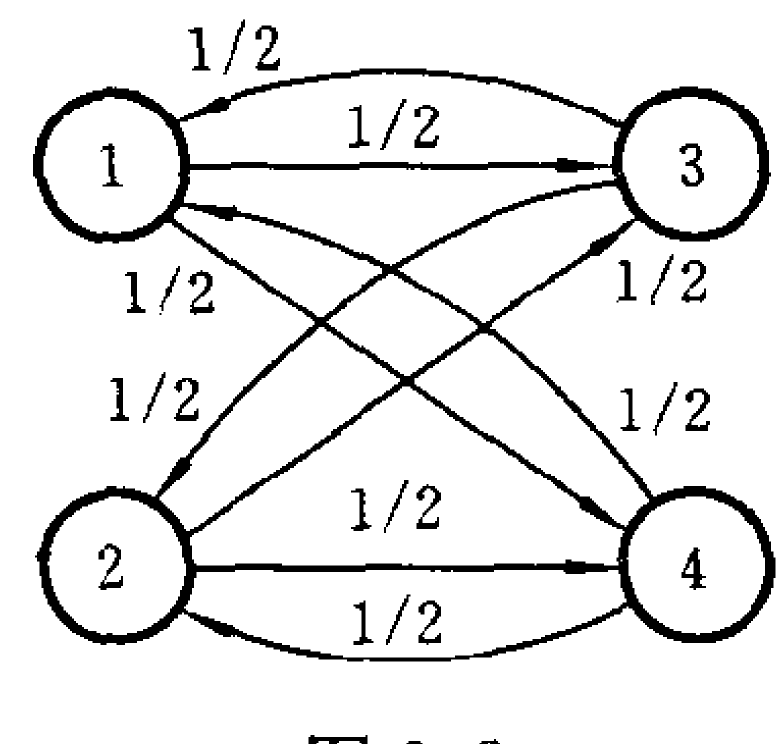


图 3.8

马尔可夫链的确定转移为 $C_1 \to C_2 \to C_1 \to C_2 \to \cdots$.

因为 $p_{22}^{(2)}>0, p_{ii}^{(3)}=0, p_{ii}^{(4)}>0, \cdots$，故确定各状态的周期为 2.

例 3 设马尔可夫链的状态空间 $I=\{a,b,c,d,e\}$，转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

求其闭集.

解 状态传递图如图 3.9 所示.

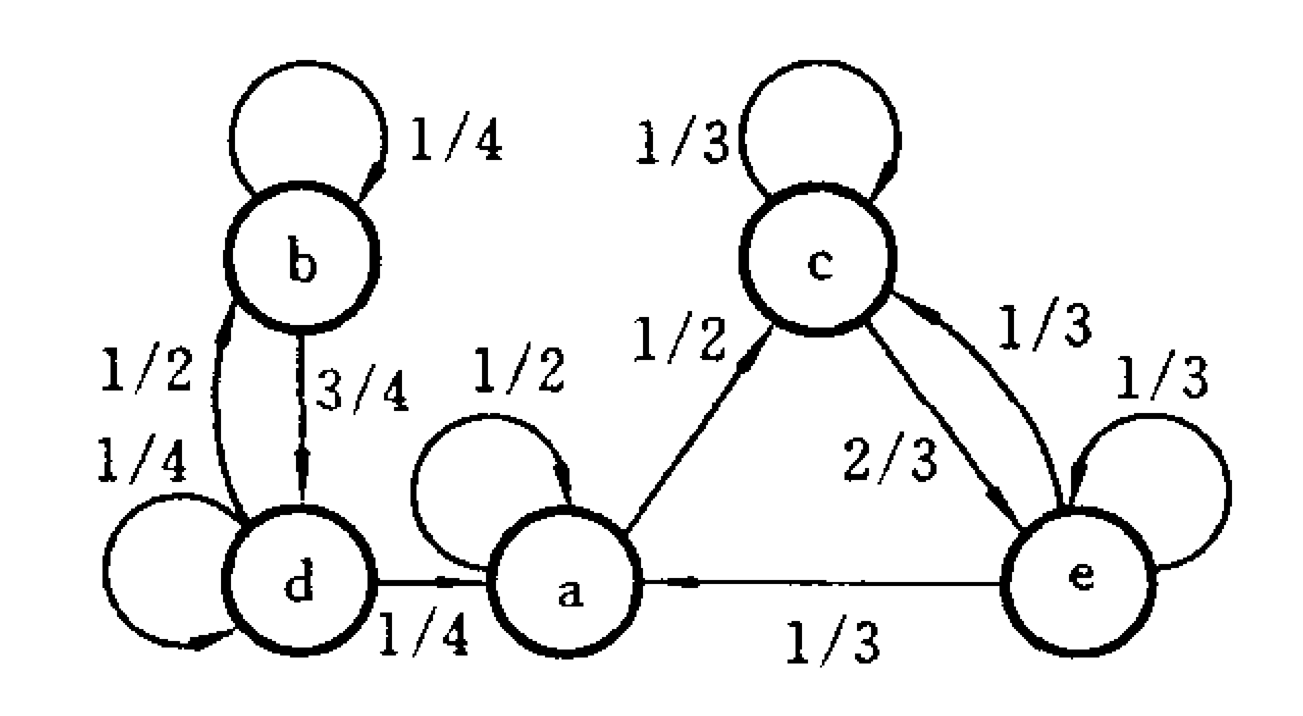


图 3.9

集合 $\{b,d\}$ 可达集合 $\{a,c,e\}$，但反过来不可达. 即若过程离开了 $\{b,d\}$，就不可能回到状态 b 与 d. 所以有两个闭集 $\{b,d\}$ 和 $\{a,c,e\}$，从而马尔可夫链是可约的.

从 $\boldsymbol{P}$ 中删去 b,d 代表的第 2 行、第 4 行和第 2 列、第 4 列，得对应不可约闭集 $\{a,c,e\}$ 的马尔可夫矩阵为

$$Q=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

例 4 不可约马尔可夫链的状态空间 $I=\{1,2,\cdots,6\}$，转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0&0&1/2&0&1/2&0\\1/3&0&0&1/3&0&1/3\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&3/4&0&1/4&0\end{bmatrix},$$

求状态的周期与闭集.

解 状态传递图如图 3.10 所示.

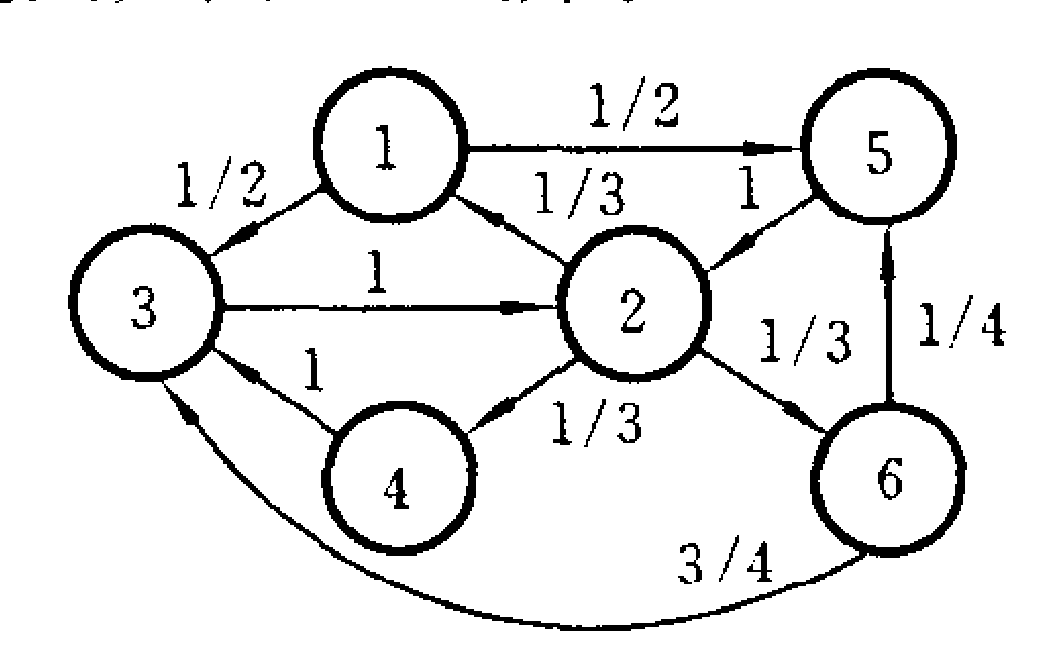


图 3.10

各状态周期 $d=3$. 固定状态 1,有

$$C_0=\{j:\text{对某 } n \text{ 有 } p_{1j}^{(3n)}>0\}=\{1,4,6\},$$

$$C_1=\{j:\text{对某 } n \text{ 有 } p_{1j}^{(3n+1)}>0\}=\{3,5\},$$

$$C_2=\{j:\text{对某 } n \text{ 有 } p_{1j}^{(3n+2)}>0\}=\{2\},$$

故 $$I=C_0+C_1+C_2.$$

例 5 对例 4 的马尔可夫链,因为 $d=3$,求 $\{X_{3n},n\geqslant 0\}$ 的转移概率矩阵 $P^{(d)}$、状态传递图、闭集与周期.

解 因为,依定理,转移概率矩阵为

$$P^{(d)}=P^{(3)}=\begin{bmatrix}1/3&0&0&1/3&0&1/3\\0&1&0&0&0&0\\0&0&7/12&0&5/12&0\\1/3&0&0&1/3&0&1/3\\0&0&7/12&0&5/12&0\\1/3&0&0&1/3&0&1/3\end{bmatrix},$$

所以状态传递图如图 3.11 所示.

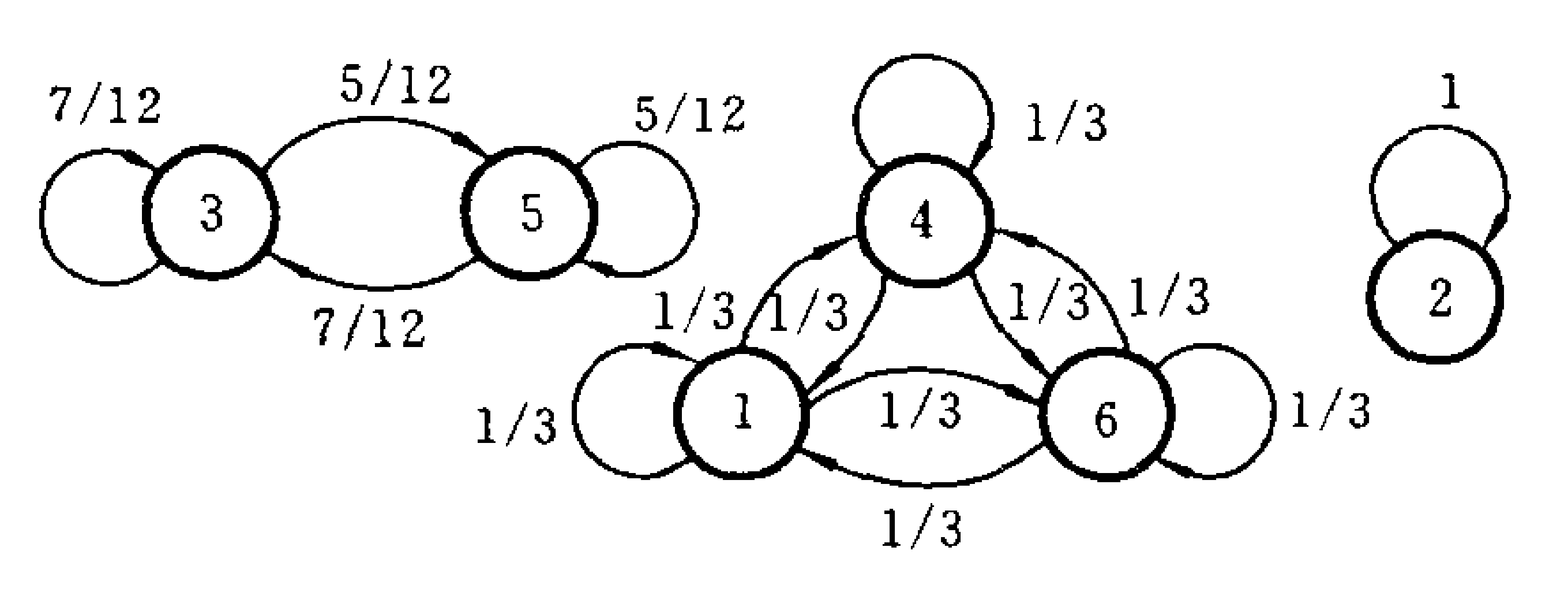


图 3.11

在$\{X_{3n},n\geqslant 0\}$中，$C_0=\{1,4,6\}$，$C_1=\{3,5\}$，$C_2=\{2\}$各为不可约闭集，周期d是1.

例6 设马尔可夫链的状态空间$I=\{0,1,2,3\}$，其转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

求状态空间的分解.

解 状态传递图如图3.12所示.

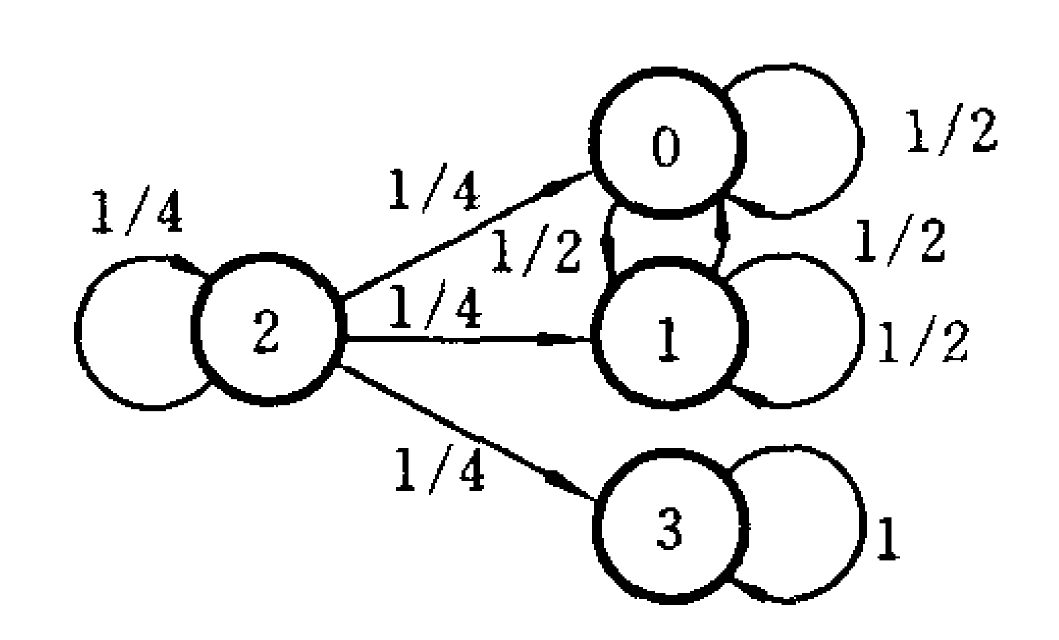


图 3.12

由状态3不可能到达任何其它状态，所以是常返态. 状态2可到达0,1,3三个状态，但从0,1,3三个状态都不能到达状态2，但0与1两状态相通，构成一个常返态闭集. 又$\sum_{n=1}^{\infty}p_{22}^{(n)}=\dfrac{1}{3}$，所以状态2为非常返态. 于是状态空间分解为$I=\{2\}+\{0,1\}+\{3\}$.

例7 设马尔可夫链状态空间$I=\{0,1,\cdots,8\}$，转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 * 表示正概率，求状态的分类.

解　状态传递图如图 3.13 所示.

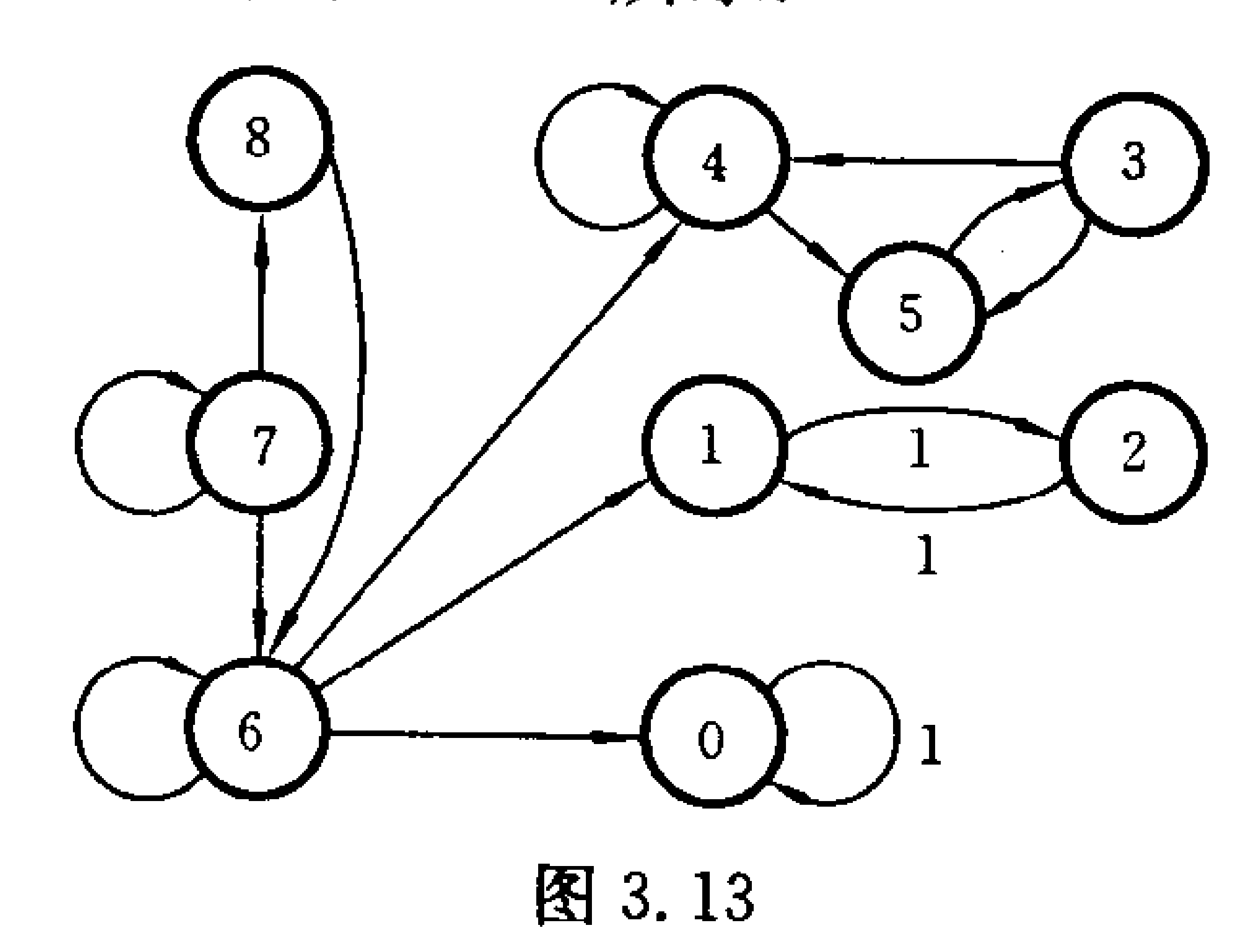


图 3.13

因 $p_{00}=1$，故状态 0 为吸收态，构成闭集.

又$\{1,2\}$构成一个闭集，$\{3,4,5\}$也构成一个闭集，而集$\{6,7,8\}$为非常返集.

例 8　马尔可夫链的状态空间 $I=\{0,1,\cdots,7\}$，其转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

求状态转移图和周期.

解 状态传递图如图 3.14 所示.

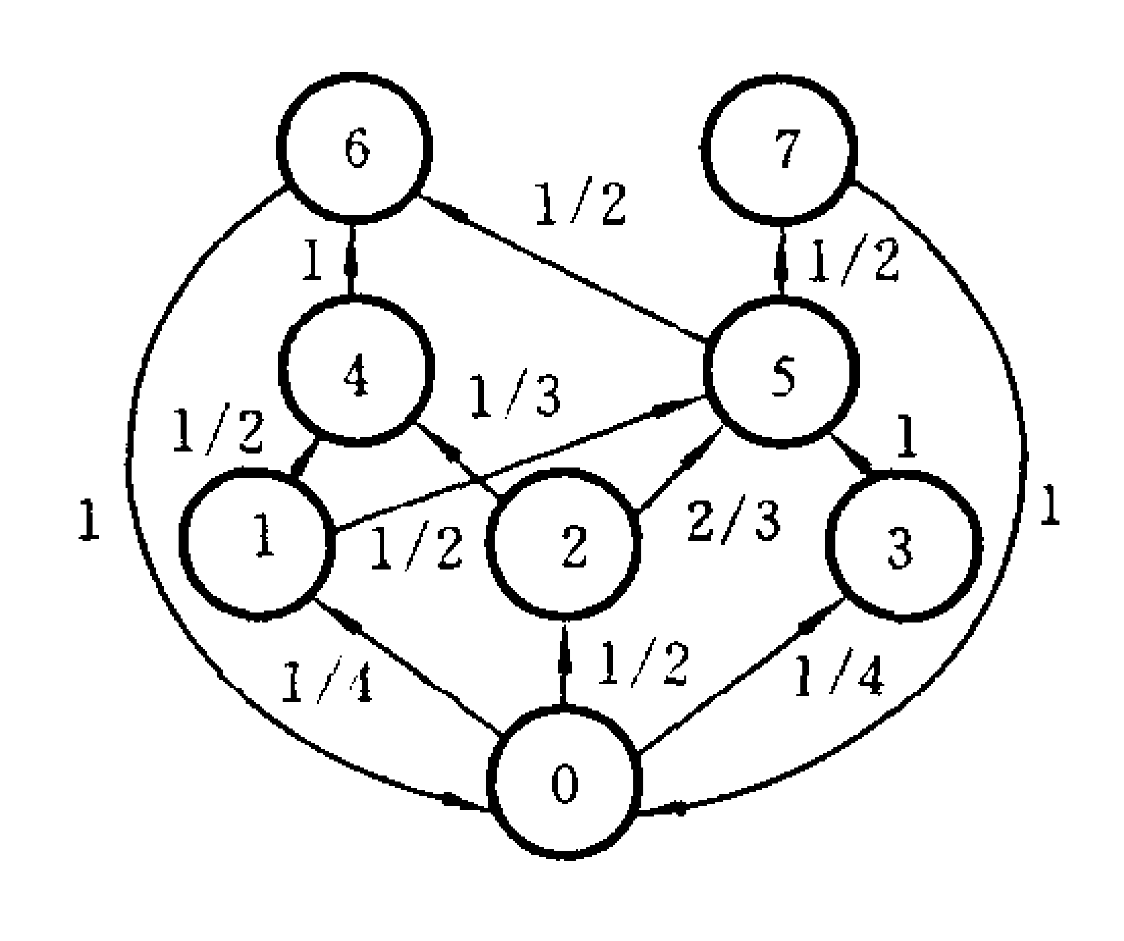


图 3.14

由图可知八个状态可分为四个子集

$C_1=\{0\}$， $C_2=\{1,2,3\}$，

$C_3=\{4,5\}$， $C_4=\{6,7\}$.

它们是互不相交的子集，$I=C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4$，有确定性的周期转移

$$C_1\to C_2\to C_3\to C_4\to C_1.$$

故该马尔可夫链的周期 $d=4$.

例 9 设质点在包括原点的正半轴上作随机游动. 除原点外，在任何一点上都以概率 p 右移一个状态，以概率 $q=1-p$ 左移一个状态；在原点处以概率 p 右移一个状态，以概率 q 留在原点处. 判别：

(1) 该随机游动是否不可约齐次马尔可夫链；

(2) 该马尔可夫链是否常返链.

解 由质点运动规则知，该过程是一个齐次马尔可夫链. 状态空间 $I=\{0,1,2,\cdots\}$. 其一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} q & p & & & \\ q & 0 & p & & \\ & q & 0 & p & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

(1) 由于状态空间的所有状态都是相通的，因此所有状态都是常返态的，构成一个闭集，依定义知，是一个不可约的齐次马尔可夫链.

(2) 利用定理(见主要内容 8). 方程组为

$$\begin{cases} Z_1=PZ_2, \\ Z_i=qZ_{i-1}+pZ_{i+1},\ i=2,3,\cdots, \end{cases}$$

利用 $p+q=1$，可改写为

$$\begin{cases} Z_2 - Z_1 = \dfrac{q}{p} Z_1, \\ Z_{i+1} - Z_i = \dfrac{q}{p}(Z_i - Z_{i-1}),\ i = 2,3,\cdots. \end{cases}$$

不断迭代可得

$$Z_{i+1} - Z_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i Z_1,\ i = 1,2,3,\cdots,$$

对 i 从 1 到 $k-1$ 求和,得

$$Z_k - Z_1 = \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-2} + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)\right] Z_1,\ k = 2,3,\cdots,$$

即
$$Z_k = \frac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)} Z_1,\ k = 1,2,\cdots.$$

此式说明:如果 $q/p<1$,则 Z_i 是有界的,即方程组有非零有界解.依定理知,此马尔可夫链是非常返态的.如果 $q/p=1$ 或 $q/p>1$,则 Z_i 是无界的,即马尔可夫链是常返态的.

从上面的例题可以看到:许多例题的问题是类似的,但解决的方法却不是唯一的.解题应该多进行思考,寻求不同的方法.

第五节　遍历性与平稳分布

主 要 内 容

一、$p_{ij}^{(n)}$ 的渐近性质与遍历性

1. 对于状态 $i\in I$,如果状态 j 是非常返态或零常返态的,则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

由上节疑难解析 2 可知,有限状态的马尔可夫链不可能全是非常返态,也不可能有零常返态,所以不可约的有限马尔可夫链必为正常返态的.如马尔可夫链有一个零常返态,则必有无限多个零

常返态.

2. 如果状态 j 是非周期的正常返态，即 j 是遍历态，则 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_j}f_{ij}$. 其中 $\mu_j=E[T_{ij}]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nf_{ij}^{(n)}$，$f_{ij}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$.

如果此马尔可夫链是不可约的，则对于 $i,j\in I$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=1/\mu_j$，称 $\{1/\mu_j\}$ 为**极限分布**.

3. 设 $p_{ij}^{(n)}$ 是齐次马尔可夫链 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 的 n 步转移概率，如果对 $i,j\in I$ 存在不依赖 i 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=p_j>0$，则称齐次马尔可夫链 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 具有**遍历性**.

4. 如果 j 是正常返态，周期为 d，则对任意的 i 及 $r=0,1,\cdots,d-1$ 有 $\lim p_{ij}^{(nd+r)}=f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_j}$. 其中 $f_{ij}(r)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_{ij}^{(md+r)}$.

若状态空间为 C 的马尔可夫链是不可约正常返态的，有周期 d，则对任意 $i,j\in C$，有

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\begin{cases}d/\mu_j, & \text{当 } i \text{ 与 } j \text{ 属同一子类 } G_s,\\ 0, & \text{当 } i \text{ 与 } j \text{ 不属同一子类 } G_s.\end{cases}$$

当 $d=1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=1/\mu_j$.

5. 对任意状态 i,j，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}p_{ij}^{(k)}=\begin{cases}f_{ij}/\mu_j, & \text{当 } j \text{ 为正常返态},\\ 0, & \text{当 } j \text{ 为非常返态或零常返态}.\end{cases}$$

若 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是不可约常返链，则对任意 i,j，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=1/\mu_j$. 当 $\mu_j=\infty$ 时，理解为 $1/\mu_j=0$.

6. 若 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是不可约遍历链，记 $\pi_k=1/\mu_k$，则 $\{\pi_k\}$ 是方程组 $y_i=\sum\limits_{k=0}^{\infty}y_kp_{kj}$ 满足条件 $y_j\geqslant 0$，$\sum\limits_{j=0}^{\infty}y_j=1$ 的唯一解.

二、平稳分布

设 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是齐次马尔可夫链，状态空间为 I，一步转移概

率为 p_{ij}.

1. 如果概率分布$\{\pi_j, j\geqslant 0\}$满足：

$$(1)\ \pi_j \geqslant 0, \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j = 1,\ (2)\ \pi_j = \sum_{i=1}^{\infty}\pi_i p_{ij}, j \geqslant 0,$$

则称$\{\pi_j\}$为马尔可夫链$\{X_n, n \geqslant 0\}$的**平稳分布**.

2. 设状态空间 $I = N$(非常返态及零常返态) $\cup C(C = C_1 + C_2 + \cdots + C_k$,每个 C_k 为基本常返闭集),则

$$对每一 C_k,有\sum_{j\in C_k}\frac{1}{\mu_j} = 1.$$

3. 设$\{\omega_j\}$为马尔可夫链$\{X_n, n \geqslant 0\}$的平稳分布,则

(1) 若 $j \in N$,则 $\omega_j = 0$;

(2) 对一切 $j \in C_k$,有 $\omega_j = \dfrac{\lambda_a}{\mu_j}$,其中常数 $\lambda_a = \sum_{j\in C_k}\omega_k$,且 $\sum_k \lambda_k = 1$.

4. 不可约非周期马尔可夫链是正常返态的充要条件是:存在平稳分布,且此平稳分布就是极限分布$\{1/\mu_j, j \geqslant 0\}$.

有限状态的不可约非周期马尔可夫链必存在平稳分布,因为正常返态,必有平稳分布.

若不可约马尔可夫链的所有状态是非常返态的或零常返态的,则不存在平稳分布.因为若有平稳分布,则由于$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)} = 0$,引出$\sum_{j\in I}\pi_j = 0$与平稳分布$\sum_{j\in I}\pi_j = 1$矛盾.

若$\{\pi_j, j \geqslant 0\}$是不可约非周期马尔可夫链的平稳分布,则

$$\lim_{n\to\infty}p_j(n) = 1/\mu_j = \pi_j.$$

其中 $p_j(n) = \sum_{i\in I}p_i p_{ij}^{(n)}$.

5. 设$\omega_j \geqslant 0$,且$\sum_j \omega_j < \infty$,则$\{\omega_j\}$是马尔可夫链$\{X_n, n\geqslant 0\}$的平稳分布的充要条件是:存在非负数列$\{\lambda_a\}$,使得:

$$(1)\ \sum_a \lambda_a = 1\ (\lambda_a = \sum_{k\in C_a}\omega_k);\quad (2)\ \omega_j = 0,\quad 当 j \in N;$$

(3) $\omega_j=\frac{\lambda_a}{\mu_j}$，当 $j\in C$.

平稳分布不存在的充要条件是 $C=\varnothing$；

平稳分布唯一存在的充要条件是：只有一个基本正常返闭集 C_0.

平稳分布有无穷多个的充要条件是：至少有两个 C_i.

疑难解析

1. 为什么要研究转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 的遍历性？

答　研究转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限性质，即研究 $P\{X_n=j\mid X_0=i\}$ 的极限分布，包含有两个问题，一是 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$ 是否存在的问题；二是如果存在，是否与初始状态 i 有关的问题. 在马尔可夫链的理论中，这一类问题的定理被统称为遍历性定理.

如果对 $i,j\in I$，存在不依赖于 i 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=p_j>0$，称齐次马尔可夫链 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 具有遍历性. 一个不可约齐次马尔可夫链，如果它的状态是非周期正常返状态，则这个状态就具有遍历性，从而它是一个遍历链. 具有遍历性的马尔可夫链，无论系统从哪一个状态出发，当转移的步数 n 充分大后，转移到状态 j 的概率都近似于 p_j. 即当 n 充分大时，可以用 p_j 作为 $p_{ij}^{(n)}$ 的近似值.

研究转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 的遍历性给我们解决实际问题带来了很多方便.

2. 研究平稳分布有什么意义？

答　判别一个不可约的、非周期的、常返态的马尔可夫链是否为遍历的，可以通过讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$ 来解决. 但是，求 $p_{ij}^{(n)}$ 的极限是困难的. 所以，我们便通过研究平稳分布是否存在来判别齐次马尔可夫链是否为遍历链.

一个不可约的非周期常返链是遍历链的充要条件是存在平稳分布，且平稳分布即极限分布 $\{1/\mu_j,j\in I\}$.

"平稳"二字的含义见于下列命题：若$\{\pi_k\}$是马尔可夫链$\{X_n,n\geqslant 0\}$的平稳分布，对每一k有$P\{X_0=k\}=\pi_k$，则对一切$n\geqslant 1$，有$P\{X_n=k\}=\pi_k$，且对任意正数n及状态$j_v,v=0,1,\cdots,l$，有

$$P\{X_{n+v}=j_v,0\leqslant v\leqslant l\}=P\{X_v=j_v,0\leqslant v\leqslant l\}.$$

方法、技巧与典型例题分析

一、状态特性的讨论

例 1 设马尔可夫链的状态空间为$I=\{0,1,2\}$，一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0.1\\ 0.3 & 0.4 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix},$$

求其相应的极限分布.

解 设其极限分布$\boldsymbol{\pi}=(\pi_0,\pi_1,\pi_2)$，由$\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi P}$得方程组

$$\begin{cases}0.5\pi_0+0.3\pi_1+0.2\pi_2=\pi_0,\\ 0.4\pi_0+0.4\pi_1+0.3\pi_2=\pi_1, \quad \pi_0+\pi_1+\pi_2=1,\\ 0.1\pi_0+0.3\pi_1+0.5\pi_2=\pi_2,\end{cases}$$

解方程组，得$\pi_0=21/62,\pi_1=23/62,\pi_2=18/62$. 即不论其起始分布如何，在经过一段时间以后，有 21/62 的时间过程处于状态 0. 有 23/62 的时间过程处于状态 1，有 18/62 的时间过程处于状态 2.

例 2 设马尔可夫链的状态空间为$I=\{0,2,3,4\}$，转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2\end{bmatrix},$$

讨论$\lim\limits_{n\to\infty}p_{i1}^{(n)}$.

解 状态 1 和状态 2 都是吸收态，都是正常返非周期的基本

常返闭集，而 $N=\{3,4\}$ 是非常返集. 有

$$p_{11}^{(n)}=1,\quad p_{21}^{(n)}=0,\quad p_{31}^{(n)}=1/3,$$

$$p_{41}^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}f_{41}^{(l)}\cdot p_{11}^{(n-l)}=\sum_{i=1}^{n}f_{41}^{(l)}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}.$$

说明 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{i1}^{(n)}$ 存在，但与 i 有关.

例 3 设马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1-p & p\\ q & 1-q\end{bmatrix},\quad 0<p,q<1,$$

讨论 $\boldsymbol{P}^{(n)}$ 的极限.

解 为了便于取极限，引入矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & -p\\ 1 & q\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1-p-q\end{bmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\frac{1}{p+q}\begin{bmatrix}q & p\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{QDQ}^{-1},$$

于是
$$\boldsymbol{P}^{(n)}=(\boldsymbol{QDQ}^{-1})^{(n)}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}1 & -p\\ 1 & q\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}$$

$$=\frac{1}{p+q}\begin{bmatrix}q+p(1-p-q)^n & p-p(1-p-q)^n\\ q-q(1-p-q)^n & p+q(1-p-q)^n\end{bmatrix}.$$

因为 $|1-p-q|<1$，取 $n\to\infty$ 的极限，得

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}^{(n)}=\frac{1}{p+q}\begin{bmatrix}q & p\\ q & p\end{bmatrix},$$

知马尔可夫链的 n 步转移概率有稳定的极限.

例 4 直线上无限制随机游动的状态空间为 $I=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，转移概率为 $p_{i\,i+1}=1-p_{i\,i-1}=p$，$i\in I$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{00}^{(n)}$.

解 不妨设 $p=1/3$，则由于 $p_{00}^{(2n+1)}=0$，$n=1,2,\cdots$，而 $P_{00}^{(2n)}=\dfrac{(2n)!}{n!\ n!}[p(1-p)]^n\approx\dfrac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{n\pi}}$（见第三节例 6），

故
$$\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(2n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4 \cdot 1/3 \cdot 2/3)^n}{\sqrt{n\pi}} = 0.$$
令 $p=1/2$，故
$$\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(2n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4 \cdot 1/2 \cdot 1/2)^n}{\sqrt{n\pi}} = 0.$$
从而知，由状态 0 出发经无穷次转移后，系统在某一规定时刻回到状态 0 的概率趋向于零.

例 5 有一个反射壁的随机游动的状态空间 $I=\{0,1,2,\cdots\}$，状态 0 为其反射壁. 分析各状态的特性.

解 状态传递图如图 3.15 所示. 各状态相通，有

$$p_{1\,1+j} = p,\quad j = 0,1,2,\cdots,\quad p_{0\,0} = q,$$
$$p_{1\,1-j} = q,\quad j = 1,2,\cdots,\quad p_{0\,k} = 0,\quad k \neq 0,1,$$
$$p_{1\,k} = 0,\ k \neq j+1, j-1, j \neq 0,$$

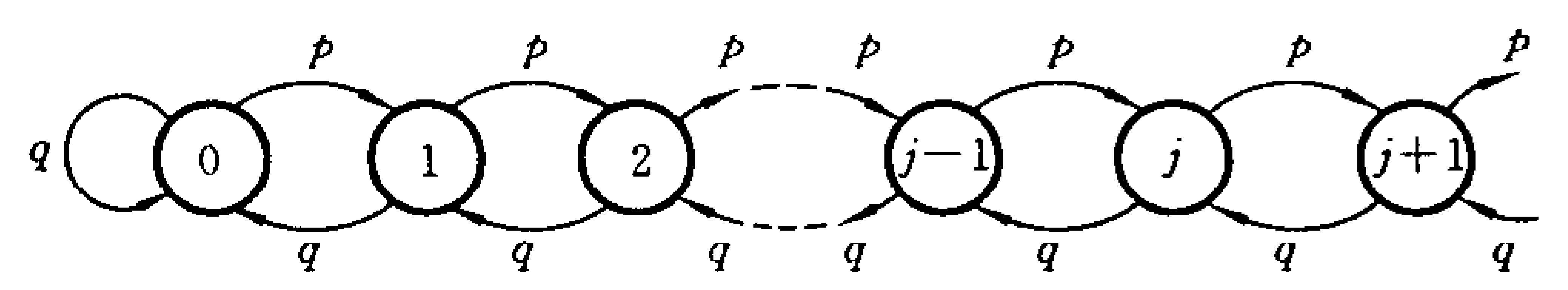


图 3.15

设马尔可夫链存在极限分布 $\{\pi_i\}$，则有方程组
$$\begin{cases} q\pi_0 + q\pi_1 = \pi_0, \\ p\pi_{j-1} + q\pi_{j+1} = \pi_j,\ j = 1,2,\cdots, \end{cases}$$
解得 $\pi_1 = \pi\pi_0/q$. 于是
$$q\pi_{j+1} - p\pi_j = q\pi_j - p\pi_{j-1},\ j = 1,2,\cdots,$$
即
$$q\pi_2 - p\pi_1 = q\pi_1 - p\pi_0 = 0,$$
得 $\pi_2 = (p/q)\pi_1 = (p/q)^2\pi_0$. 继续这一过程，得
$$\pi_j = (p/q)^j \pi_0.$$

显然，如果 $(p/q) < 1$，则 $\sum_{j=0} (p/q)^i < \infty$，则级数 $\sum_{j=0}^{\infty} (p/q)^j$ 收敛，因此 $\pi_0 = (1-p/q)$. 故当 $p < 1/2$ 时，该随机游动是正常返

态的，马尔可夫链是遍历的．而

$$\pi_j = (p/q)^j(1-p/q),\ j=0,1,2,\cdots.$$

j 状态的平均返回时间 $\mu_j=1/\pi_j=(q/p)^j q/(q-p)$．当 j 增大时，平均返回时间也增大．

当 $p=1/2$ 时，$p/q=1$，级数 $\sum_{j=0}^{\infty}(p/q)^j$ 发散，随机游动为零常返态的，$\pi_j=0,\mu_j=\infty$．

当 $p>q$ 时，无极限分布，各状态均为非常返态．

当 p 从 0 开始逐渐增加到 $p<1/2$ 时，该链都属于正常返态，$p=1/2$ 为零常返态，$p>1/2$ 为非常返态．

例 6 设一马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

讨论此马尔可夫链的遍历性．

解 因为

$$\boldsymbol{P}^{(2)}=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},\cdots,$$

当 n 为奇数时，$\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}$；当 n 为偶数时，$\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}^{(2)}$．所以，对任一固定的状态 j ($j=1,2,3,4$)，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$ 都不存在．故此马尔可夫链不具遍历性．

例 7 一排队模型是马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1-q & q & 0 & 0 \\ p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) & 0 \\ 0 & p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) \\ 0 & 0 & p(1-q) & pq+(1-p) \end{bmatrix},$$

讨论此马尔可夫链的遍历性,并求其极限分布.

解 计算 $\boldsymbol{P}^{(3)}=\boldsymbol{P}^3$,知无零元,故马尔可夫链是遍历的.

设极限分布 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3)$满足方程组

$$\begin{cases}\pi_0=(1-q)\pi_0+p(1-q)\pi_1,\\ \pi_1=q\pi_0+[pq+(1-p)(1-q)]\pi_1+p(1-q)\pi_2,\\ \pi_2=q(1-p)\pi_1+[pq+(1-p)(1-q)]\pi_2+p(1-q)\pi_3,\\ \pi_3=q(1-p)\pi_2+[pq+(1-p)]\pi_3,\end{cases}$$

且 $\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$. 解方程组,得唯一解

$$\pi_0=\frac{1}{C}p^3(1-q)^3,\quad \pi_1=\frac{1}{C}p^2q(1-q)^2,$$

$$\pi_2=\frac{1}{C}pq^2(1-p)(1-q),\quad \pi_3=\frac{1}{C}q^3(1-p)^2.$$

其中

$$C=p^3(1-q)^3+p^2q(1-q)^2+pq^2(1-q)(1-p)+q^3(1-p)^2.$$

若设 $p=q=1/2$,则 $\pi_0\approx0.142$,$\pi_1=0.286=\pi_2=\pi_3$. 故极限分布 $\boldsymbol{\pi}=\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{2}{7},\frac{2}{7}\right)$. 即经过一段时间后,系统中无人的情形占 14.2%的时间,分别有 1 人、2 人、3 人的情形占 28.6%的时间.

例 8(洗牌问题) N 张牌有 $N!$ 种次序,故设 $I=\{1,2,\cdots,N!\}$. 每次洗牌都是一次转移概率,是一个马尔可夫链. 讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$.

解 如果一次洗牌使 $j\to k$,则必存在洗牌后变为 j 的 r. 这表明除了次序不同外,转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的 j 行与 j 列是等同的,故列元素之和也为 1. 如果链是不可约的周期的,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=1/N!$. 事实上,此时的平稳分布存在且为极限分布,满足 $\pi_j=\sum\limits_{i\in I}\pi_ip_{ij}$. 由 $\sum\limits_{i\in I}p_{ij}=1$,知 $\pi_j=\alpha$(常数). 又由 $\sum\limits_{j\in I}\pi_j=1$,知 $\pi_j=1/N!$.

二、求平稳分布问题

例 9 设马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\1/2 & 0 & 1/2\\0 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix},$$

求其平稳分布.

解 设$\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$满足方程组

$$\begin{cases}\pi_1=0.5\pi_1+0.5\pi_2,\\ \pi_2=0.5\pi_1+0.5\pi_3, & \pi_1+\pi_2+\pi_3=1.\\ \pi_3=0.5\pi_2+0.5\pi_3,\end{cases}$$

解得唯一解$\pi=(1/3,1/3,1/3)$,则

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\lim_{x\to\infty}P\{X_n=j\mid X_0=i\}=1/3.$$

即从状态i出发经很长时间后马尔可夫链处于状态1,2,3的概率都是1/3.即马尔可夫链X_n趋向于均匀分布.

例 10 在一计算机系统中,每一循环具有误差的概率取决于先前一个循环是否有误差.以0表示误差状态,以1表示无误差状态.设转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0.75 & 0.25\\0.5 & 0.5\end{bmatrix},$$

讨论相应齐次马尔可夫链的遍历性,并求其极限分布(平稳分布).

解法 1 用定义解.由于P无零元.对$0,1\in I$,都有$p_{ij}^{(m)}>0$,所以此链具有遍历性.

因为P与$\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0.25\end{bmatrix}$(特征矩阵)相似,故

$$P=H\Lambda H^{-1},$$

其中
$$H=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5}\\1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5}\end{bmatrix},$$

又,$P^n=H\Lambda^nH^{-1}$,得

$$\lim_{n\to\infty}P^n=\begin{bmatrix}2/3 & 1/3\\2/3 & 1/3\end{bmatrix}.$$

由于 $2/3+1/3=1$，故 $\boldsymbol{\pi}=(2/3,1/3)$ 为此链的极限分布.

解法 2 设 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_0,\pi_1)$，由 $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi P}$ 及 $\sum_{i=0}^{1}\pi_i=1$，得方程组

$$\begin{cases}\pi_0=0.75\pi_0+0.5\pi_1,\\ \pi_1=0.25\pi_0+0.5\pi_1,\end{cases}\quad \pi_0+\pi_1=1.$$

解得唯一解：$\pi_0=2/3,\pi_1=1/3$，故 $\boldsymbol{\pi}=(2/3,1/3)$ 是极限分布.

例 11 设齐次马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}q & p & 0\\ q & 0 & p\\ 0 & q & p\end{bmatrix},\ q=1-p,0<p<1,$$

证明：此马尔可夫链有遍历性，并求其平稳分布.

证 因为

$$\boldsymbol{P}^{(2)}=\begin{bmatrix}p^2+pq & pq & p^2\\ q^2 & 2pq & p^2\\ q^2 & pq & pq+p^2\end{bmatrix}$$

无零元，所以此马尔可夫链具有遍历性.

注意 对于有限链，若存在正整数 m，使 $\boldsymbol{P}^{(m)}$ 无零元，则此链是遍历的.

设 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_0,\pi_1,\pi_2)$，由 $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi P}$ 和 $\sum_{i=0}^{2}\pi_i=1$，得方程组

$$\begin{cases}\pi_0=q\pi_0+q\pi_1,\\ \pi_1=p\pi_0+q\pi_1,\\ \pi_2=p\pi_1+p\pi_2,\end{cases}\quad \pi_0+\pi_1+\pi_2=1,$$

解得唯一解 $\pi_0=\dfrac{q^2}{q^2+pq+p^2}$，$\pi_1=\dfrac{pq}{q^2+pq+p^2}$，

$$\pi_2=\frac{p^2}{q^2+pq+p^2}.$$

例 12 设齐次马尔可夫链（有两个反射壁的随机游动）的转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1/3/ & 1/3 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

讨论马尔可夫链的遍历性,并求平稳分布.

解 设 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5)$,由 $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$ 及 $\sum_{i=1}^{5}\pi_i=1$.

得方程组

$$\begin{cases}\pi_1=\pi_2/3,\\ \pi_2=\pi_1+\pi_2/3+\pi_3/3,\\ \pi_3=\pi_2/3+\pi_3/3+\pi_4/3,\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5=1,\\ \pi_4=\pi_3/3+\pi_4/3+\pi_5,\\ \pi_5=\pi_4/3,\end{cases}$$

解得唯一解 $\pi_1=\pi_5=1/11,\pi_2=\pi_3=\pi_4=3/11$,故平稳分布

$$\boldsymbol{\pi}=(1/11,3/11,3/11,3/11,1/11).$$

经计算,得

$$\boldsymbol{P}^{(4)}=\boldsymbol{P}^4=\begin{bmatrix}5/27 & 10/27 & 8/27 & 3/27 & 1/27\\ 10/81 & 33/81 & 19/81 & 14/81 & 3/81\\ 8/81 & 19/81 & 23/81 & 19/81 & 8/81\\ 3/81 & 14/81 & 19/81 & 33/81 & 10/81\\ 1/27 & 1/9 & 8/27 & 10/27 & 5/27\end{bmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{P}^{(4)}$ 无零元,所以马尔可夫链是遍历的.

例 13 设有时齐次马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

讨论此马尔可夫链的遍历性,并求平稳分布.

解 马尔可夫链的状态空间为 $I=\{1,2\}$,都是吸收态,状态空间可以分解为两个闭集之和,即 $I=\{1\}+\{2\}$,故不是不可约的

马尔可夫链.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P\,P\,\cdots\,P = P^n = P^{(n)},$$

所以状态 1 和状态 2 都是非周期的，且有

$$\lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = 1 \neq \lim_{n\to\infty} p_{21}^{(n)} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{12}^{(n)} = 0 \neq \lim_{n\to\infty} p_{22}^{(n)} = 1,$$

故不是遍历链. 但由 $\pi=\pi P$，得

$$\pi = (\pi_1, \pi_2), \quad \pi_1 + \pi_2 = 1,$$

故
$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_1, \\ \pi_2 = \pi_2, \end{cases} \quad \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

可见平稳分布是存在的，且有无穷多个.

$$\{p, q\}, 0 \leqslant p, 0 \leqslant q, p + q = 1$$

都是平稳分布. 说明此齐次马尔可夫链不满足遍历链条件，但存在平稳分布，只是平稳分布不是唯一的.

例 14 图 3.16 给出了六个车站间的公路连通情形. 设汽车每天从一个车站驶向一直接相邻车站，并当晚到达该站留宿. 次日继续相同的活动. 设每天汽车开往临近任一车站都是等可能的. 试说明经很长时间后，各站每晚留宿的汽车比例趋于稳定，求出这个比例.

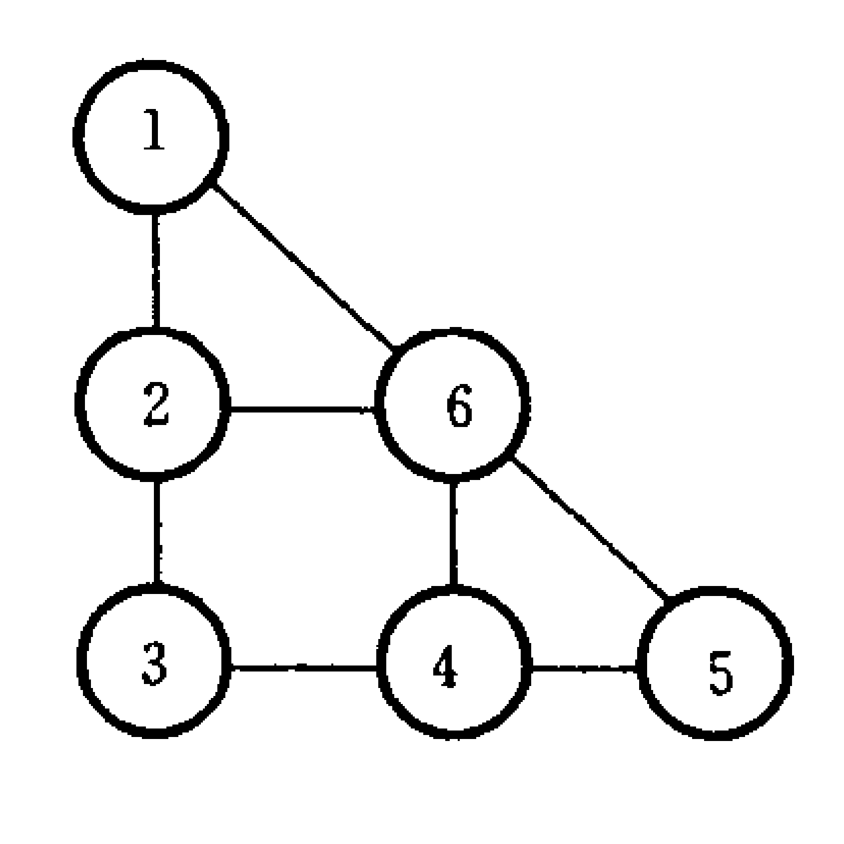


图 3.16

解 以 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 记第 n 天某辆汽车留宿的车站号，显然这是一个马尔可夫链，转移概率矩阵为

$$
\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}
0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\
1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0
\end{bmatrix},
$$

设平稳分布 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6)$，则由

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\pi P}=\boldsymbol{\pi}, \\
\sum_{i=1}^{6}\pi_i=1,
\end{cases}
$$

解得 $\boldsymbol{\pi}=(1/8,3/16,1/8,3/16,1/8,1/4)$. 即无论汽车从哪一个车站出发，在很长时间后，它在任一车站留宿的概率是固定的，故所有汽车也以稳定比例在各车站留宿.

第四章　连续时间的马尔可夫链

第一节　连续时间的马尔可夫链概念

主要内容

1. 设随机过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$的状态空间为$I=\{i_n,n\geqslant 0\}$，若对任意的$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_{n+1}$及$i_1,i_2,\cdots,i_{n+1}\in I$，都有

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}\mid X(t_1)=i_1,X(t_2)=i_2,\cdots,X(t_n)=i_n\}$$
$$=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}\mid X(t_n)=i_n\},$$

则称$\{X(t),t\geqslant 0\}$为**连续时间的马尔可夫链**，也称为**时间连续、状态离散的马尔可夫过程或可数状态的马尔可夫过程**.

本书只讨论齐次的、可数状态的马尔可夫过程.

2. 条件概率$P\{X(t+s)=j\mid X(s)=i\}$ $(t\geqslant 0,s\geqslant 0)$称为马尔可夫过程在时刻$s$由状态$i$经时刻$t$转移到状态$s$的**转移概率**，记为$p_{ij}(s,t)$.

若转移概率$p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t)$，即转移概率只与转移状态i、转移所用时间t及转移到达状态j有关，而与转移开始时间s无关，则称相应的时间连续、状态离散的马尔可夫过程为齐次马尔可夫过程，称此马尔可夫链为**平稳的或齐次的转移概率**. 其转移概率矩阵记为

$$\boldsymbol{P}(t)=(p_{ij}(t)),\ i,j\in I,t\geqslant 0.$$

3. 齐次马尔可夫过程的转移概率具有下列性质：

(1) $p_{ij}(t)\geqslant 0,\ i,j\in I,t\in[0,\infty)$；

(2) $\sum_{j\in I}^{\infty} p_{ij}(t)=1,\ i\in I,\ t\in[0,\infty)$;

(3) 满足 C-K 方程

$$p_{ij}(t+s)=\sum_{k\in I} p_{ik}(s)p_{kj}(t),\ i,j\in I,t\in[0,\infty).$$

还假定 p_{ij} 满足连续性条件

$$\lim_{t\to 0} p_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

4. 对齐次马尔可夫过程在开始时刻($t=0$)取状态 j 的概率分布

$$p_j(0)=P\{X(0)=j\},\quad j\in I$$

称为它的**初始概率分布**.

对齐次马尔可夫过程在 t ($t\geqslant 0$)时刻取状态 j 的概率分布

$$p_j(t)=P\{X(t)=j\},\quad j\in I$$

称为它的 t 时刻的**绝对概率分布**.

绝对概率分布具有以下性质:

(1) $p_j(t)\geqslant 0$;

(2) $\sum_{j\in I} p_j(t)=1$;

(3) $p_j(t)=\sum_{i\in I} p_i(0)p_{ij}(t)$;

(4) $p_j(t+\tau)=\sum_{i\in I} p_i(t)p_{ij}(\tau)$;

(5) $P\{X(t_1)=i_1,X(t_2)=i_2,\cdots,X(t_n)=i_n\}$

$$=\sum_{i\in I} p_i(0)p_{i_1 i_1}(t_1)p_{i_1 i_2}(t_2-t_1)\cdots p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1}).$$

5. 设$\{X(t),t\geqslant 0\}$是连续时间的马尔可夫链,若在时刻 0 过程刚刚到达状态 i ($i\in I$),以 τ_i 记过程在离开状态 i 之前在 i 停留的时间,则 τ_i 服从参数为 μ_i 的指数分布.

若 $\mu_i=\infty$,则在状态 i 停留的平均时间为零,状态 i 称为**瞬时态**. 若 $\mu_i=0$,则在状态 i 停留的停留时间为无限长,状态 i 称为**吸收态**.

疑难解析

1. 为什么连续时间马尔可夫链的过程进入状态 i 后停留时间 τ_i 服从指数分布?

答 因为对于 $s,t\geqslant 0$,有

$$P\{\tau_i > s+t \mid \tau_i > s\} = P\{\tau_i > t\},$$

所以 τ_i 具有无记忆性.事实上,由于

$$\{\tau_i>s\}\Leftrightarrow\{X(u)=i,0<u\leqslant s\mid X(0)=i\},$$

$$\{\tau_i>s+t\}$$

$$\Leftrightarrow\{X(u)=i,0<u\leqslant s,X(v)=i,s<v\leqslant s+t\mid X(0)=i\},$$

故

$$\begin{aligned}&P\{\tau_i>s+t\mid\tau_i>s\}\\&=P\{X(u)=i,0<u\leqslant s,\\&\quad X(v)=i,s<v\leqslant s+t\mid X(u)=i,\ 0\leqslant u\leqslant s\}\\&=P\{X(v)=i,s<v\leqslant s+t\mid X(t)=i\}\\&=P\{X(u)=i,0<u\leqslant t\mid X(0)=i\}\\&=P\{\tau_i>t\}.\end{aligned}$$

由于停留时间 τ_i 具有无记忆性,所以服从指数分布.

2. 怎样理解并构造连续时间的马尔可夫链?

答 连续时间的马尔可夫链可以理解为一个做如下运动的随机过程:它以一个离散时间的马尔可夫链的方式从一个状态转移到另一个状态,在两次转移之间以指数分布在前一状态停留.这个指数分布只与过程现在的状态有关,与过去的状态无关(具有无记忆性),但与将要转移到的状态独立.

除了用定义构造一个连续时间的马尔可夫链外,还可以利用具有下面两个性质的随机过程来实现:

(1) 在转移到下一个状态之前处于状态 i 的时间服从参数为 μ_i 的指数分布;

(2) 在过程离开状态 i 时,将以概率 p_{ij} 到达状态 j,且 $\sum\limits_{j\in I}p_{ij}=1$.

方法、技巧与典型例题分析

要用定义和性质构造连续时间的马尔可夫链,必须熟悉定义和了解性质,对概念有充分的理解.

例 1 说明泊松过程是一个连续时间的齐次马尔可夫链.

解 设强度为 λ 的泊松过程 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 的状态空间 $I=\{0,1,2,\cdots\}$,由第二章知,泊松过程在任一状态的停留时间服从指数分布,且由状态 i 转移到状态 $i+1$ 的概率为 1. 又由泊松过程的独立增量性知,过程在状态 i 的停留时间与状态的转移是独立的,则依性质知泊松过程是连续时间的齐次马尔可夫链,对 $i\in I$,转移概率为

$$p_{ii}(t) = P\{N(t+s) = i \mid N(s) = i\} = P\{N(t) = 0\} = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

$$\begin{aligned} p_{i\,i+1}(t) &= P\{N(t+s) = i+1 \mid N(s) = i\} \\ &= P\{N(t) = 1\} = \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

$$p_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}\mathrm{e}^{-\lambda t},\ j > i+1,$$

$$p_{ij}(t)=0,\ j<i.$$

例 2 证明马尔可夫过程 $\{X(t), t\in[0,\infty)\}$ 的转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}(t)=(p_{ij}(t), i,j\in I)$,满足

$$\boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}(s+t),\ s,t\geqslant 0.$$

证 任取 $i,j\in I$,有

$$\begin{aligned} p_{ij}(s+t) &= P\{X(s+t) = j \mid X(0) = i\} \\ &= \frac{P\{X(s+t) = j, X(0) = i\}}{P\{X(0) = i\}} \\ &= \sum_{k:P\{X(s)=k,X(0)=i\}>0} \frac{P\{X(s+t) = j, X(0) = i\}}{P\{X(0) = i\}} \\ &\quad \cdot \frac{P\{X(s+t) = j, X(s) = k, X(0) = i\}}{P\{X(s+t) = j, X(0) = i\}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k: P\{X(s)=k, X(0)=i\}>0} \frac{P\{X(s+t)=j \mid X(s)=k, X(0)=i\}}{P\{X(s)=k \mid X(0)=i\}}$$

$$= \sum_{k\in I} p_{ik}(s) p_{kj}(t).$$

即
$$\boldsymbol{P}(s+t) = \boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t).$$

例 3 设$\{X(t), t\geqslant 0\}$是一族随机变量，每个 $X(t)$的取值均属于 $I=\{0,1,2,\cdots\}$，且 $X(0)=0$，有独立增量. 证明：$\{X(t), t\geqslant 0\}$是一个马尔可夫过程.

证 对任意正整数 n，$0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n$，$i_0, i_1, \cdots, i_n\in I$，由独立增量，有

$$P\{X(t_n)=i_n \mid X(t_{n-1})=i_{n-1}, \cdots, X(t_0)=i_0\}$$
$$= P\{X(t_n)-X(t_{n-1})=i_n-i_{n-1} \mid X(t_{n-1})-X(t_{n-2})$$
$$= i_{n-1}-i_{n-2}, \cdots, X(t_1)-X(t_0)=i_1-i_0, X(t_0)=t_0\}$$
$$= P\{X(t_n)-X(t_{n-1})=i_n-i_{n-1}\}.$$

同理
$$P\{X(t_n)=i_n \mid X(t_{n-1})=i_{n-1}\}$$
$$=P\{X(t_n)-X(t_{n-1})=i_n-i_{n-1}\}.$$

由以上两式可知，$\{X(t), t\geqslant 0\}$是连续时间的齐次马尔可夫过程.

例 4(尤尔(Yule)过程) 设生物群体中各个生物体的繁殖是相互独立的、强度为 λ 的泊松过程，并且群体中没有死亡，这个过程称为尤尔过程. 试说明尤尔过程是一个连续时间的马尔可夫链.

解 设在时刻 $t=0$ 只有一个个体，种群将有的个体数是$\{1,2,\cdots\}$. 以 $T_i(i\geqslant 1)$记群体数目从 i 增加到 $i+1$ 所需时间. 由尤尔过程定义可知，当群体数目为 i 时，这 i 个个体产生后代是相互独立的泊松过程. 由泊松过程的可加性可知，这相当有一个强度为 λi 的泊松过程. 又由泊松过程的独立增量性可知，T_i 与状态的转移($i\geqslant 1$)是独立的，且$\{T_i\}$是相互独立的参数为 λi 的指数变量. 所以尤尔过程是一个连续时间的马尔可夫链，其转移概率 $p_{ij}(t)$ 可求. 因为

$$P\{T_1\leqslant t\} = 1-\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

$$P\{T_1+T_2\leqslant t\}=\int_0^t P\{T_1+T_2\leqslant t\mid T_1=x\}\lambda e^{-\lambda x}dx$$
$$=\int_0^t(1-e^{-2\lambda(t-x)})\lambda e^{-\lambda x}dx=(1-e^{-\lambda t})^2,$$
$$P\{T_1+T_2+T_3\leqslant t\}$$
$$=\int_0^t P\{T_1+T_2+T_3\leqslant t\mid T_1+T_2\leqslant x\}dP\{T_1+T_2\leqslant x\}$$
$$=\int_0^t(1-e^{3\lambda(t-x)})2\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x}dx)=(1-e^{-\lambda t})^3,$$
$$\vdots$$
$$P\{T_1+T_2+\cdots+T_j\leqslant t\}=(1-e^{-\lambda t})^j.$$

而 $\{T_1+T_2+\cdots+T_j\leqslant t\}\Leftrightarrow\{X(t)\geqslant j+1\mid X(0)=1\}$,

故
$$p_{1j}(t)=P\{X(t)=j\mid X(0)=1\}$$
$$=P\{X(t)\geqslant j\mid X(0)=1\}-P\{X(t)\geqslant j+1\mid X(0)=1\},$$
$$=(1-e^{-\lambda t})^{j-1}-(1-e^{-\lambda t})^j=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1},\ j\geqslant1.$$

这是一个均值为 $e^{-\lambda t}$ 的几何分布.

又 $p_{ij}(t)=P\{X(s+t)=j\mid X(s)=i\}$ 相当于一个数目从 i 个个体开始的尤尔过程的群体数目在时间 t 内增加到数目 j 的概率. 由可加性,这相当于 i 个独立的服从均值为 $e^{-\lambda t}$ 的几何分布的随机变量的和取值为 j 的概率. 于是,得

$$p_{ij}(t)=C_{j-1}^{i-1}e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-i},\quad j\geqslant i\geqslant1.$$

例 5(生灭过程) 一个生物种群中,各个生物体的繁殖是相互独立的、强度为 λ 的泊松过程,但是每个个体将以指数速率死亡. 这个过程称为生灭过程. 求转移概率 $p_{i\,i-1}$, $p_{i\,i+1}$.

解 设在时刻 $t=0$ 有一个个体. 它的状态为 $\{0,1,2,\cdots\}$. 在状态 i 转移到状态 $i+1$,说明群体数目增加了一个;从状态 i 转移到状态 $i-1$,说明群体数目减少了一个. 以 T_i 记过程从状态 i 到达状态 $i+1$ 或 $i-1$ 的时间,则由生灭过程定义和上例可知,群体繁殖的过程是一尤尔过程,是一个相互独立的、参数为 λi 的指数分布. 类似地,由可加性与独立增量性可知,群体死亡的过程也是

一尤尔过程，是一个相互独立的、参数为 μi 的指数分布. 由于 T_i 相互独立且与从状态 i 转移到状态 $i+1$ 或 $i-1$ 无关，所以生灭过程可以看成是两个尤尔过程之和，$\{T_i\}$ 服从参数为 $\lambda i+\mu i$ 的指数分布. 依泊松过程计算，得

$$p_{i\,i+1}=\frac{\lambda}{\mu+\lambda},\qquad p_{i\,i-1}=\frac{\mu}{\mu+\lambda}.$$

第二节　柯尔莫哥洛夫-费勒方程

主要内容

1. 若一个连续时间的马尔可夫链以概率 1 在任意长的时间内转移的次数是有限的，则称此马尔可夫链是正则的.

2. 设齐次马尔可夫过程满足正则性条件，则对任意固定的 $i,j\in I$，$p_{ij}(t)$ 是 t 的一致连续函数.

3. 设 $p_{ij}(t)$ 是齐次马尔可夫过程的转移概率，则有下列极限：

(1) $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1-p_{ii}(t)}{t}=V_i=q_{ii}\leqslant\infty,\quad i=j;$

(2) $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{p_{ij}(t)}{t}=q_{ij}<\infty,\quad i\neq j,$

称 q_{ij} 为齐次马尔可夫过程从状态 i 转移到状态 j 的**转移速率或跳跃强度**.

对有限状态的齐次马尔可夫过程，有 $q_{ii}=\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}<\infty;$

对状态空间无限的齐次马尔可夫过程，只有 $q_{ii}\geqslant\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}$.

4. 对于有限状态的齐次马尔可夫过程，矩阵

$$Q=\begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots & q_{0n}\\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ q_{n0} & q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn}\end{bmatrix}$$

称为齐次马尔可夫过程的**转移速率矩阵**，简称 Q 矩阵. 当 $q_{ii}=\sum_{j\neq i}q_{ij}<\infty$ 时，称 Q 矩阵为**保守的**.

由于对 $i\in I$，$p_{ij}(t)$ 在 $t=0$ 处的导数（右导数）存在，即 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=q_{ij}=p'_{ij}(0^{+})$，所以 Q 矩阵也称为转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}(t)$ 的**密度矩阵**. 以 Q 为密度矩阵的马尔可夫过程称为 Q 过程. 由 Q 矩阵求转移矩阵 $\boldsymbol{P}(t)$ 的问题，称为 Q 矩阵问题.

转移速率 q_{ij} 具有以下性质：

(1) $q_{ij}\leqslant 0,\quad i=j,\ i,j\in I$； (2) $q_{ij}\geqslant 0,\quad i\neq j,\ i,j\in I$；

(3) $\sum\limits_{j\in I}q_{ij}=0$.

5. 对任意 $i\in I$，下面极限

$$-p'_{ii}(0)=\lim_{t\to 0^{+}}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}\triangleq q_{i}\leqslant\infty$$

存在，即导数存在，但可能为无穷. q_i 的取值决定了状态的性质.

(1) $q_i=0$ 时，有 $p_{ii}(t)=1\ (\forall t>0)$，表明系统从 i 出发不发生转移，称状态 i 为**吸收状态**.

(2) $q_i=\infty$ 时，有 $p_{ii}(t)=0(\forall t>0)$，表明系统从 i 出发经任意时间都不回到 i，称状态 i 为**瞬时状态**.

(3) 当 $0<q_i<\infty$ 时，$0<p_{ij}(t)<1(\forall t>0)$. 称状态 i 为**逗留状态**.

若令 $\tau(\omega)$ 表示系统一直停留在出发状态的时间长度，则 $E[\tau(\omega)\mid X(0)=i]=1/q_i$. 即 $1/q_i$ 表示停留在状态 i 的平均时间长度.

6. 柯尔莫哥洛夫-费勒微分方程

(1) **向后方程** 设 $\sum\limits_{k\neq i}q_{ik}=q_{ii}<\infty$，对一切 $i,j\in I,t\geqslant 0$，有

$$p'_{ij}(t)=\sum q_{ik}p_{kj}(t)-q_{ii}p_{ij}(t).$$

(2) **向前方程** 在适当的正则条件下，有

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)q_{kj} - p_{ij}(t)q_{jj}.$$

向后方程的矩阵形式为 $\boldsymbol{P}'(t)=\boldsymbol{QP}(t)$.

向前方程的矩阵形式为 $\boldsymbol{P}'(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}$.

若 $\boldsymbol{Q}$ 是一个有限维矩阵，则上述方程解为

$$\boldsymbol{P}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}t}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{Q}t)^j}{j!}.$$

7. 齐次马尔可夫过程在 t 时刻处于状态 $j\in I$ 的绝对概率 $p_j(t)$满足方程

$$p'_j(t) = -p_i(t)q_{jj} + \sum_{k\neq j} p_k(t)q_{kj}.$$

设 $p_{ij}(t)$为连续时间马尔可夫链的转移概率，若存在时刻 t_1 和 t_2，使得 $p_{ij}(t_1)>0$，$p_{ij}(t_2)>0$，则称状态 i 和 j 是**互通的**. 若所有状态都是互通的，则称此马尔可夫链为**不可约的**.

8. 转移概率 $p_{ij}(t)$的遍历性　取 $h>0$ 固定，$p_{ij}(h)$为一步转移概率，则 n 步转移概率为 $p_{ij}^{(n)}(h)=p_{ij}(nh)$.

(1) 设$\{p_{ij}(h)\}$是非周期不可约的，且对任意 $i,j\in I$，下列极限存在且与 i 无关：

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}(h) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(nh) = \pi_j(h),$$

即

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}(h) = \begin{cases} 0, & j\text{ 为非常返或零常返态}, \\ \dfrac{1}{\mu_j(h)}, & j\text{ 为遍历态}. \end{cases}$$

(2) 对一切 $i,j\in I$，下列极限存在且与 i 无关：

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j.$$

此结论又可称为**马尔可夫定理**.

(3) $\{\pi_j, j\in I\}$有下列性质：$\pi_j \geqslant 0$，$\quad \sum_{j\in I}\pi_j = 1$；

对任意 $t>0$，有 $\pi_j = \sum_{k\in I}\pi_k p_{kj}(t)$.

(4) 若对某一 $j\in I$，有 $\pi_j>0$，则对一切 $i\in I$，有 $\pi_i>0$，且

$$\sum_{j\in I}\pi_j = 1, \quad \sum_{i\neq j}\pi_i q_{ij} = \pi_j q_j, \quad j \in I.$$

9. 设连续时间的马尔可夫链是不可约的，则有下列性质：

(1) 若 I 是正常返态的，则$\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)$存在且等于 $\pi_j>0, j\in I$. 这里 π_j 是方程组

$$\begin{cases}\pi_j q_{ij} = \sum\limits_{k\neq j}\pi_k q_{kj}, \\ \sum\limits_{i\in I}\pi_j = 1\end{cases}$$

的唯一非负解，此时称$\{\pi_j, j\in I\}$是该过程的平稳分布，且有

$$\lim_{t\to\infty}p_j(t) = \pi_j.$$

(2) 若它是零常返态的或非常返态的，则

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty}p_j(t) = 0, \quad i,j \in I.$$

疑 难 解 析

1. p_{ij} 是齐次马尔可夫过程从状态 i 到状态 j 的转移概率，由其极限式得到转移速率 q_{ij}，试说明极限式的概率意义.

答　极限的概率意义是：在长度为 t 的时间区间内，过程从状态 i 转移到另一其它状态的转移概率 $1-p_{ii}(t)$等于 $q_{ii}(t)$加上一个比 t 高阶的无穷小量；而从状态 i 转移到状态 j 的概率 $p_{ij}(t)$等于 $q_{ij}(t)$加上一个比 t 高阶的无穷小量.

2. Q 矩阵的意义是什么？

答　Q 矩阵称为齐次马尔可夫过程的转移速率矩阵. 由于 $Q=P'(0)$，它又称为转移概率矩阵 $P(t)$的密度矩阵. 它反映了齐次马尔可夫过程的转移概率（函数）在 $t=0$ 的变化率.

Q 矩阵是一个常数矩阵，而转移概率矩阵是一个函数矩阵. Q 矩阵比转移概率矩阵 P 易于求得.

3. 柯尔莫哥洛夫-费勒微分方程有什么实际意义？它又受到哪些条件的限制？

答 柯尔莫哥洛夫-费勒微分方程建立了齐次马尔可夫过程的$\boldsymbol{Q}$矩阵与转移概率矩阵$\boldsymbol{P}(t)$之间的联系. 如果给了密度矩阵$\boldsymbol{Q}$,在一定条件下,可以通过柯尔莫哥洛夫-费勒向后(向前)方程解出转移概率$p_{ij}(t)$. 例如,若$\boldsymbol{Q}$是一个有限维矩阵,则由向后与向前方程可求得解为$\boldsymbol{P}(t)=\mathrm{e}^{Qt}=\sum\limits_{j=0}^{\infty}[(Qt)^j/j!]$.

在柯尔莫哥洛夫-费勒微分方程的证明过程中,需要交换极限与求和的次序,但对向前方程来说,必须附加适当的正则条件才能实现,这就使方程的应用受到一定的限制.

方法、技巧与典型例题分析

这部分的习题形式比较多,计算过程也比较复杂,因此必须准确地理解概念的意义,掌握计算的公式. 特别要注意的是:$p_{ij}(t)$是t的函数,不再像以前的p_{ij}那样是一个常数. 因此,$p_{ij}(t)$存在连续、可导及求导数等问题,需要结合微积分的知识来讨论与求解.

例1 设参数连续状态离散的马尔可夫过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$,其状态空间$I=\{1,2,\cdots,m\}$,当$i\neq j,i,j=1,2,\cdots,m$时,$q_{ij}=1$;当$i=1,2,\cdots,m$时,$q_{ii}=-(m-1)$. 求$p_{ij}(t)$.

解 由于 $p'_{ij}(t)=\dfrac{\mathrm{d}p_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}=\sum\limits_{k\in I}p_{ik}(t)q_{kj}$,

故 $$p'_{ij}(t)=-(m-1)p_{ij}(t)+\sum_{k\neq j,k\in I}p_{ik}(t).$$

又由于 $$\sum_{k=1}^{m}p_{ik}(t)=1\Rightarrow\sum_{k\neq j,k\in I}p_{ik}(t)=1-p_{ij}(t),$$

所以 $p'_{ij}(t)=-(m-1)p_{ij}+[1-p_{ij}(t)]=1-mp_{ij}(t)$.

解上述方程,可得

$$p_{ij}(t)=C\mathrm{e}^{-mt}+1/m,\quad i,j=1,2,\cdots,m.$$

利用初始条件$p_{ii}(0)=1$与$p_{ij}(0)=0$,得:当$i=j$时,$C=1-1/m$;当$i\neq j$时,$C=-1/m$. 于是

$$p_{ii}(t) = (1-1/m)\mathrm{e}^{-mt} + 1/m, \quad i = 1,2,\cdots,m,$$
$$p_{ij}(t) = (1-\mathrm{e}^{-mt})/m, \quad i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,m.$$

例 2 设 $\boldsymbol{P}(t)=(p_{ij}(t), i,j\in I=\{0,1,2,\cdots\})$ 是一个转移概率矩阵，若令

$$\widehat{p}_{ij}(t) = \begin{cases} p_{ij}(t), & i,j \in I, \\ 1-\sum\limits_{k\in I} p_{ik}(t), & i \in I, j = -1, \\ 0, & i = -1, j \in I, \\ 1, & i = j = -1, \end{cases}$$

证明：$\widehat{\boldsymbol{P}}(t) \triangleq (\widehat{p}_{ij}(t), i,j\in I\cup\{-1\})$ 是一个转移概率矩阵，且有 $\sum \widehat{p}_{ij}(t) = 1,\ i,j \in I \cup \{-1\}$.

证 显然，有

$$\widehat{p}_{ij}(t) \geqslant 0,\ i,j \in I \cup \{-1\}. \qquad ①$$
$$\sum \widehat{p}_{ij}(t) = 1,\ i \in I \cup \{-1\}. \qquad ②$$

当 $i,j\in I$ 时，有

$$\begin{aligned} \widehat{p}_{ij}(s+t) &= p_{ij}(s+t) = \sum_{k\in I} p_{ik}(s)p_{kj}(t) \\ &= \sum_{k\in I} \widehat{p}_{ik}(s)\widehat{p}_{kj}(t) \\ &= \sum_{k\in I\cup\{-1\}} \widehat{p}_{ik}(s)\widehat{p}_{kj}(t). \end{aligned} \qquad ③$$

其中最后一个等号用到：当 $j\in I, k=-1$ 时，$\widehat{p}_{kj}(t)=0$.

类似可证

$$\widehat{p}_{-1j}(s+t) = 0 = \sum_{k\in I\cup\{-1\}} \widehat{p}_{-1k}(s)\widehat{p}_{kj}(t),\ j \in I. \qquad ④$$

$$\begin{aligned} \widehat{p}_{i-1}(s+t) &= 1 - \sum_{j\in I} p_{ij}(s+t) \\ &= \sum_{k\in I\cup\{-1\}} \widehat{p}_{ik}(s) - \sum_{j\in I}\sum_{k\in I} p_{ik}(s)p_{kj}(t) \\ &= \sum_{k\in I} p_{ik}(s)(1-\sum_{j\in I} p_{kj}(t)) + \widehat{p}_{i-1}(t)\cdot 1 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k\in I}\hat{p}_{ik}(s)\hat{p}_{k-1}(t) + \hat{p}_{j-1}(s)\hat{p}_{-1\,-1}(t)$$

$$= \sum_{k\in I\cup\{-1\}} \hat{p}_{ik}(s)\hat{p}_{kj}(t). \qquad ⑤$$

$$\hat{p}_{-1\,-1}(s+t) = 1 = \hat{p}_{-1\,-1}(s)\hat{p}_{-1\,-1}(t)$$

$$= \sum_{k\in I}\hat{p}_{-1\,k}(s)\hat{p}_{k-1}(t) + \hat{p}_{-1\,-1}(s)\hat{p}_{-1\,-1}(t)$$

$$= \sum_{k\in I\cup\{-1\}} \hat{p}_{-1\,k}(s)\hat{p}_{k-1}(t). \qquad ⑥$$

由式①至式⑥等六个等式,知命题成立.

例 3 设 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij},i,j\in I=\{1,2,\cdots,N\})$是一个保守的密度矩阵,证明:$\boldsymbol{P}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}t}$是转移概率矩阵,且满足

$$\lim_{t\to 0^+} p_{ij}(t) = p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i\neq j, \\ 1, & i=j. \end{cases}$$

证 由 $\boldsymbol{P}(t) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\boldsymbol{Q}t)^k$,有

$$\boldsymbol{P}(t)\cdot\boldsymbol{1} = \boldsymbol{1}, \quad 0\leqslant t<\infty,$$

$$\boldsymbol{P}(s+t) = \boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t),$$

$$\boldsymbol{P}(0) = \lim_{t\to 0^+}\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{I},$$

其中 $$\boldsymbol{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{N\times 1}, \quad \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

若设 $q_{ij}>0, 1\leqslant i,j\leqslant j, i\neq j$,则由 $\boldsymbol{P}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\boldsymbol{Q}t)^k$ 知,存在 $\delta>0$,使得当 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 时,有 $\boldsymbol{P}(t)>0$. 又因为

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}(\delta)\boldsymbol{P}(t-\delta), \quad \delta\leqslant t\leqslant 2\delta.$$

故 $\boldsymbol{P}(t)>0, 0<t<2\delta$. 反复进行下去,即有

$$\boldsymbol{P}(t)>0,\ 0\leqslant t<\infty.$$

对一般的 $\boldsymbol{Q}$,作

$$Q_n = \begin{bmatrix} q_{11} - \frac{N-1}{n} & q_{12} + \frac{1}{n} & \cdots & q_{1N} + \frac{1}{n} \\ q_{21} + \frac{1}{n} & q_{22} - \frac{N-1}{n} & \cdots & q_{2N} + \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{N1} + \frac{1}{n} & q_{N2} + \frac{1}{n} & \cdots & q_{NN} - \frac{N-1}{n} \end{bmatrix},$$

则 Q_n 是一个保守的密度矩阵，且满足上面讨论过的条件. 故

$$P_n(t) \triangleq e^{Q_n t} \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = Q$，所以

$$\lim_{n\to\infty} P_n(t) = P(t) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

例 4(随机信号问题)　计算机中某个触发器有两种状态，记为“0”和“1”. 设触发器状态的变化构成一个齐次马尔可夫过程 $\{X(t), t\in[0,\infty)\}$，$I=\{0,1\}$，且有

$$p_{01}(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$
$$p_{10}(\Delta t) = \mu \Delta t + o(\Delta t).$$

求矩阵 Q 与 $P(t)$.

解　设 $X(t)$ 表示时刻 t 触发器的状态，则

$$q_{01} = \lim_{\Delta t\to 0^+} \frac{p_{01}(\Delta t) - \delta_{01}}{\Delta t} = \lambda,$$

$$q_{10} = \lim_{\Delta t\to 0^+} \frac{p_{10}(\Delta t) - \delta_{10}}{\Delta t} = \mu,$$

$$q_{00} = -q_{01} = -\lambda, \quad q_{11} = -q_{10} = -\mu.$$

于是
$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix},$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{bmatrix}, \quad P(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由柯尔莫哥洛夫向前方程，可得

$$\frac{dp_{00}(t)}{dt} = -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t),$$

$$\frac{dp_{01}(t)}{dt} = \lambda p_{00}(t) - \mu p_{01}(t),$$

$$\frac{dp_{10}(t)}{dt} = -\lambda p_{10}(t) + \mu p_{11}(t),$$

$$\frac{dp_{11}(t)}{dt} = \lambda p_{10}(t) - \mu p_{11}(t),$$

$$p_{00}(0) = p_{11}(0) = 1,\quad p_{10}(0) = p_{01}(0) = 0.$$

解上面的线性微分方程组,得

$$p_{00}(t) = \mu_0 + \lambda_0 e^{-(\lambda+\mu)t},\quad p_{01}(t) = \lambda_0(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}).$$

$$p_{10}(t) = \mu_0(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}),\quad p_{11}(t) = \lambda_0 + \mu_0 e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

其中
$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},\quad \mu_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

例 5 设 $Q=(q_{ij}, i,j\in I)$是标准转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}(t)$的密度矩阵,若 $\sup\limits_{i\in I}(-q_{ii})<\infty$,证明:$\lim\limits_{t\to 0^+} p_{ii}(t)=1$ 对一切 $i\in I$ 成立.

证 令 $M=\sup\limits_{i\in I}|q_{ii}|$,则由转移概率的极限式

$$0 \leqslant 1 - p_{ii}(t) \leqslant 1 - e^{-q_{ii}t} \leqslant 1 - e^{-Mt},$$

得
$$0 \leqslant \lim_{t\to 0^+} \sup_{i\in I}(1 - p_{ii}(t)) \leqslant \lim_{t\to 0^+}(1 - e^{-Mt}) = 0,$$

即 $\lim\limits_{t\to 0^+} p_{ii}(t)=1$ 对 $i\in I$ 一致成立.

例 6 设定义在$[a,b]$上的实值函数 $q(t)$有连续导数,$h(t)$是$[a,b]$上的连续函数,μ 是一个实数,证明:微分方程式

$$q'(t) + \mu q(t) = h(t),\ a \leqslant t \leqslant b$$

的解为 $g(t)=\int_a^t e^{-\mu(t-s)}h(s)ds + g(a)e^{-\mu(s-a)}, a \leqslant t \leqslant b.$

证 令 $G(t)=e^{\mu t}g(t)$,则

$$G'(t) = \mu e^{\mu t}g(t) + e^{\mu t}g'(t) = e^{\mu t}h(t).$$

利用一阶线性微分方程的求解公式,有

$$G(t) = \int_a^t e^{\mu s}h(s)ds + g(a)e^{\mu a}.$$

所以,原方程的解为

$$g(t)=\int_a^t e^{-\mu(t-s)}h(s)\mathrm{d}s+g(a)e^{-\mu(t-a)},a\leqslant t\leqslant b.$$

例 7(随机游动问题) 质点在线段[1,5]上作随机游动，且只能停留在整数点上. 质点可在任何时刻发生移动，移动规则是：

1°若时刻 t 质点位于 2,3,4 处，则在 $(t,t+\Delta t)$ 内右移一格的概率是 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，左移一格的概率是 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$，停留原处的概率是 $1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t+o(\Delta t)$；

2°若时刻 t 质点位于 1 处，则在 $(t,t+\Delta t)$ 内右移一格的概率是 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，停留原处的概率是 $1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$；

3°若时刻 t 质点位于 3 处，则在 $(t,t+\Delta t)$ 内左移一格的概率是 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$，停留原处的概率是 $1-\mu\Delta t+o(\Delta t)$；

4°在 $(t,t+\Delta t)$ 内发生其它移动的概率都是 $o(\Delta t)$.

求各 $p_{ij}(t)$ 满足的微分方程组.

解 按移动规则写出转移概率函数

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1,\\ \mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,\\ 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i=2,3,4,\\ o(\Delta t), & \text{其它}.\end{cases}$$

由极限式可求得

$$q_{ij}=\begin{cases}\lambda, & j=i+1,\\ -\mu, & j=i-1,\\ 1-\lambda-\mu, & j=i=2,3,4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

类似地，有 $$p_{1j}(\Delta t)=\begin{cases}\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=2,\\ 1-\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=1,\\ o(\Delta t), & \text{其它},\end{cases}$$

$$q_{1j}=\begin{cases}\lambda, & j=2,\\ -\lambda, & j=1,\\ 0, & \text{其它};\end{cases}$$

$$p_{5j}(\Delta t)=\begin{cases}\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=4,\\ 1-\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=5,\\ o(\Delta t), & \text{其它},\end{cases}\quad q_{5j}=\begin{cases}\mu & j=4,\\ -\mu, & j=5,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

综合上述结果，得

$$Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\ & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ & & & \mu & -\mu\end{bmatrix}.$$

故 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t).$$

$$\boldsymbol{P}(0)=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}.$$

解方程组即得转移概率函数 $p_{ij}(t)$.

例 8 讨论例 7 中齐次马尔可夫过程的遍历性.

解 由柯尔莫哥洛夫向前方程，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q},\quad \boldsymbol{P}(0)=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix},$$

即 $$\begin{cases}p'_{i1}(t)=-\lambda p_{i1}(t)+\mu p_{i2}(t),\ i\in I,\\ p'_{ij}(t)=\lambda p_{ij-1}(t)-(\lambda+\mu)p_{ij}(t)+\mu p_{ij+1}(t),\\ \qquad\qquad i\in I, j=2,3,4,\\ p'_{i5}(t)=\lambda p_{i4}(t)-\mu p_{i5}(t),\ i\in I.\end{cases}$$

由于所有状态是相通的，所以由状态 i 出发经时刻 $s>0$ 总可以转移到状态 j. 故所有 $p_{ij}(s)>0$ $(i\ j\in I)$. 由马尔可夫定理知，有极

限分布

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j, \ j = 1,2,3,4,5.$$

将柯尔莫哥洛夫向前方程化为线性方程组，可以解得极限概率 π_j. 即，由 $\sum_{j=1}^{5}\pi_j = 1$ 及方程组

$$\begin{cases} 0 = -\lambda\pi_1 + \mu\pi_2, \\ 0 = \lambda\pi_{j-1} - (\lambda+\mu)\pi_j + \mu\pi_{j+1}, \\ 0 = \lambda\pi_4 - \mu\pi_5 \end{cases}$$

得唯一解

$$\pi_1 = \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^5}, \quad \pi_j = \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^5}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-1}, \ j = 2,3,4,5.$$

$\pi=\{\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5\}$ 即为平稳分布，这说明 $t\to\infty$ 时，此齐次马尔可夫过程是遍历的.

例 9 设 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是 $I=\{0,1\}$ 为状态空间的马尔可夫过程，转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}(t)=\{p_{ij}(t),i,j\in I\}$ 为标准阵，且

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(1-p_{00}(t)) = q_0 = \lambda, \quad \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(1-p_{11}(t)) = q_1 = \mu,$$

求：(1) $\boldsymbol{P}(t)$，在 $p_0=P(X(0)=0)$，$0<p_0<1$ 时；

(2) $E[X(t)]$，$D[X(t)]$.

解 (1)设 $\boldsymbol{P}(t)$ 的密度矩阵是 $\boldsymbol{Q}$. 由 I 有限知 $\boldsymbol{Q}$ 是保守阵，即

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{P}'(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}$，即有方程组

$$\begin{cases} p'_{i0}(t) = -(\lambda+\mu)p_{i0}(t) + \mu, \\ p'_{i1}(t) = -(\lambda+\mu)p_{i1}(t) + \lambda, \end{cases} \quad i = 0,1.$$

利用例 6 的结果，得方程组之解为

$$\boldsymbol{P}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} + \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} - \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} - \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \end{bmatrix},$$

且 $$E[X(t)]=P(X(t)=1)$$
$$=p_0p_{01}(t)+(1-p_0)p_{11}(t)$$
$$=p_0[p_{01}(t)-p_{11}(t)]+p_{11}(t)$$
$$=-p_0e^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t};$$
$$D[X(t)]=E[X^2(t)]-(E[X(t)])^2=E[X(t)](1-E[X(t)])$$
$$=\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}-p_0e^{-(\lambda+\mu)t}\right]$$
$$\cdot\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}+p_0e^{-(\lambda+\mu)t}\right].$$

例 10 有一部电话，如果在时刻 t 电话在使用，则 $X(t)=1$；如果在时刻 t 没使用，则 $X(t)=0$. 设 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 具有转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}(t)=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1+7e^{-8t} & 7-7e^{-8t}\\ 1-e^{-8t} & 7+e^{-8t}\end{bmatrix},$$

并设初始概率为 $p_0(0)=1/10, p_1(0)=9/10$.

(1) 计算矩阵 $\boldsymbol{P}(0)$；

(2) 验证 $\boldsymbol{P}(t)$ 每一行元素之和等于 1；

(3) 计算概率：$P\{X(0.2)=0\}, P\{X(0.2)=0 \mid X(0)=0\}$,
$P\{X(0.1)=0, X(0.6)=1, X(1.1)=1 \mid X(0)=0\}$,
$(P\{X(1.1)=0, X(0.6)=1, X(0.1)=0\}$；

(4) 计算时刻 t 的绝对概率；

(5) 计算 $\boldsymbol{P}'(t)$，求出密度矩阵 $\boldsymbol{Q}$；

(6) 验证 $\boldsymbol{Q}$ 的每一行元素之和等于零.

解 (1)因为 $t=0$，所以 $e^{-8t}=e^0=1$，代入 $\boldsymbol{P}(t)$ 得

$$\boldsymbol{P}(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(2) $\frac{1}{8}[(1+7e^{-8t})+(7-7e^{-8t})]=1$,

$$\frac{1}{8}[(1-e^{-8t})+(7-e^{-8t})]=1.$$

(3) $$P\{X(0.2)=0\}=\frac{1}{80}(1+7e^{-1.6})+\frac{9}{80}(1-e^{-1.6})$$

$$=\frac{1}{40}(5-e^{-1.6}),$$

$$P\{X(0.2)=0\mid X(0)=0\}=\frac{1}{8}(1+7e^{-1.6}),$$

$$P\{X(0.1)=0,X(0.6)=1,X(1.1)=1\mid X(0)=0\}$$

$$=\frac{1}{8^3}(1+7e^{0.8})(1-e^{-0.48})(7+e^{-4.4}),$$

$$P\{X(1.1)=0,X(0.6)=1,X(0.1)=0\}$$

$$=\frac{1}{8^3}(1+7e^{-4.4})(1-e^{-0.48})(1+7e^{0.8}).$$

(4) $$p_0(t)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}(1+7e^{-8t})+\frac{1}{8}\cdot\frac{9}{10}(1-e^{-8t})$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{5}e^{-8t}\right).$$

$$p_1(t)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}(7-7e^{-8t})+\frac{1}{8}\cdot\frac{9}{10}(7+e^{-8t})=\frac{1}{8}\left(7+\frac{1}{5}e^{-8t}\right).$$

(5) 将 $p_{ij}(t)$对 t 求导,得

$$\boldsymbol{P}'(t)=\begin{bmatrix}-7e^{-8t} & 7e^{-8t}\\ e^{-8t} & -e^{-8t}\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}.$$

(6) $\quad -7e^{-8t}+7e^{-8t}=0,\quad e^{-8t}+(-e^{-8t})=0.$

所以 Q 矩阵每行元素之和等于零.

例 11 由泊松过程定义知

$$p_{i\,i+1}(\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\mid N(t)=i\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

$$p_{ii}(\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)-N(t)=0\mid N(t)=i\}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

求柯尔莫哥洛夫-费勒微分方程的解.

解 因为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}=q_{ii}=\lambda,\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ii+1}(\Delta t)}{\Delta t}=q_{ii+1}=\lambda,$$

所以
$$\begin{aligned}p'_{ij}(t)&=q_{ii+1}p_{i+1\,j}(t)-q_{ii}p_{ij}(t)\\&=\lambda p_{i+1\,j}(t)-\lambda p_{ij}(t).\end{aligned}$$

当 $j=i$ 时,有 $p'_{ii}(t)=-\lambda p_{ii}(t)$;

当 $j=i+1$ 时,有 $p'_{ii+1}(t)=\lambda p_{i+1\,i+1}(t)-\lambda p_{ii+1}(t)$;

当 $j=i+2$ 时,有 $p'_{ii+2}(t)=\lambda p_{i+1\,i+2}(t)$;

在其它情形,微分方程不存在.

由条件 $p_{ii}(0)=1$ 得微分方程的解

$$p_{ii}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad p_{ii+1}(t)=\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

$$p_{ij}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!},\quad j\geqslant i\geqslant 0.$$

类似地,尤尔过程 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 在条件 $X(0)=1$ 下有

$$P\{X(t+\Delta t)-X(t)=1\,|\,X(t)=i\}=i\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$
$$P\{X(t+\Delta t)-X(t)=0\,|\,X(t)=i\}=1-i\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$
$$P\{X(t+\Delta t)-X(t)\geqslant 2\,|\,X(t)=i\}=o(\Delta t),$$
$$P\{X(t+\Delta t)-X(t)<0\,|\,X(t)=i\}=0.$$

按上面方法得尤尔过程转移概率 $p_{ij}(t)$ 满足的向前方程为

$$p'_{ii}(t)=-i\lambda p_{ii}(t).$$
$$p'_{ij}(t)=(j-1)\lambda p_{ij-1}(t)-j\lambda p_{ij}(t),\quad j>i.$$

解得 $p_{ij}(t)=C_{j-1}^{i-1}\mathrm{e}^{-\lambda ti}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^{j-i},\quad j\geqslant i\geqslant 1.$

第三节 生灭过程

主要内容

生灭过程是连续时间马尔可夫链的一类重要情形,具有较大的研究价值.

1. 一个状态空间为 $I=\{0,1,2,\cdots\}$、有连续参数集 $T=[0,\infty)$ 的齐次马尔可夫过程 $\{X(t),t\geqslant 0\}$，如果它的密度矩阵为

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & \\ & & \mu_3 & -(\mu_3+\lambda_3) & \lambda_3 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

则称该过程为**生灭过程**. 其中 λ_i 为**出生率**，μ_i 为**死亡率**，Q 必为**保守阵**.

2. 生灭过程的转移概率 $p_{ij}(t)$ 的性质. 设 $i\in I$，对充分小的时间 $t>0$，有

$$\begin{gathered} p_{i\,i+1}(t)=\lambda_i t+o(t), \quad \lambda_i>0, \\ p_{i\,i-1}(t)=\mu_i t+o(t), \quad \mu_i>0,\mu_0=0,i\geqslant 1, \\ p_{ii}(t)=1-(\lambda_i+\mu_i)t+o(t), \\ p_{ij}(t)=o(t), \quad |i-j|\geqslant 2. \end{gathered}$$

若 $\lambda_i=i\lambda,\mu_i=i\mu$（$\lambda,\mu$ 为正常数），则称 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为**线性生灭过程**.

若在密度矩阵 Q 中，$\mu_i=0$（$i\in I$），则群体个体减少的概率为零，称为**纯生过程**（如泊松过程）. 若在密度矩阵 Q 中，$\lambda_i=0$（$i\in I$），则群体个数增加的概率为零，称为**纯灭过程**.

3. 生灭过程的柯尔莫哥洛夫微分方程

(1) 向后方程是

$$\begin{cases} p'_{ij}(t)=-(\mu_i+\lambda_i)p_{ij}(t)+\lambda_i p_{i+1\,j}(t)+\mu_i p_{i-1\,j}(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i\geqslant 1,j\in I, \\ p'_{0j}(t)=-\lambda_0 p_{0j}(t)+\lambda_0 p_{1j}(t), \quad j\in I. \end{cases}$$

(2) 向前方程是

$$\begin{cases} p'_{ij}(t)=-p_{ij}(t)(\mu_j+\lambda_j)+p_{i\,j-1}(t)\lambda_{j-1}+p_{i\,j+1}(t)\mu_{j+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j\geqslant 1,i\in I, \\ p'_{i0}(t)=-p_{i0}(t)\lambda_0+p_{i1}(t)\mu_1, \quad i\in I. \end{cases}$$

绝对概率有如下方程：

$$\begin{cases} p'_j(t) = -p_j(t)(\mu_j+\lambda_j)+p_{j-1}(t)\lambda_{j-1}+p_{j+1}(t)\lambda_{j+2}, & j\geqslant 1, \\ p'_0(t) = -p_0(t)\lambda_0+p_1(t)\mu_1. \end{cases}$$

4. 生灭过程的平稳分布

$$\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n,\cdots),$$

$$\pi_0=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\right)^{-1},$$

$$\pi_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_0\mu_1\cdots\mu_n}\pi_0,\ n=1,2,\cdots.$$

在级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ 收敛的条件下，以 Q 为密度矩阵的生灭过程存在平稳分布. 由

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\pi_j,\quad i,j\in I$$

知，当 t 充分大时，$p_{ij}(t)\approx\pi_j$.

5. 如果生灭过程 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 的密度矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & \\ & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

则下列命题等价：

(1) $\overline{\boldsymbol{P}}(t)\triangleq(\overline{p}_{ij}(t),i\,j\in I)=(\sum\limits_{n\geqslant 0}p_{ij}^{(n)}(t),\quad i,j\in I)$ 是一个标准转移概率矩阵；

(2) 方程 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{Y}\geqslant\boldsymbol{0},\sup y_i<\infty,\lambda>0$ 只有零解，其中 $\boldsymbol{I}=\{\delta_{ij},i,j\in I\},\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots)^{-1},\boldsymbol{0}=(0,0,\cdots)^{-1}$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_n}{\lambda_k\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n}=\infty$.

当 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 的密度矩阵为 $\boldsymbol{Q}$，且满足以上命题(3)时，生灭过程 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 的转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}(t)=\overline{\boldsymbol{P}}(t)$.

6. 设生灭过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$的密度矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 如主要内容 1 所给，转移概率矩阵为 $\boldsymbol{P}(t)$，且 $\boldsymbol{P}(t)=\overline{\boldsymbol{P}}(t)$. 设 $\boldsymbol{Q}$ 已知，$\boldsymbol{P}(t)$未知. 令

$$\pi_{ij}=\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t),\quad \bar{\pi}_{ij}=\lim_{t\to\infty}\bar{p}_{ij}(t),\ i,j\geqslant 0.$$

(1) 设 $\lambda_0>0$，令 $\rho_0=1,\rho_n=\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n},\ n\geqslant 1.$

i) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho_n=\infty$，则 $\bar{\pi}_{ij}=0,\ i,j\geqslant 0$；

ii) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho_n<\infty,\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_n\rho_n}=\infty$，则

$$\bar{\pi}_{ij}=\rho_n\Big/\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n,\quad i\geqslant 0,j\geqslant 0;$$

iii) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho_n<\infty,\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_n\rho_n}<\infty$，则

$$\bar{\pi}_{ij}=0,\quad i,j\geqslant 0.$$

(2) 设 $\lambda_0=0$，令 $\gamma=1+\dfrac{\mu_1}{\lambda_1}+\dfrac{\mu_1\mu_2}{\lambda_1\lambda_2}+\cdots$,

$$y_n^{(0)}=\frac{1}{\gamma}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k},\quad n\geqslant 1,\ y_0^{(0)}=1.$$

i) 若 $\gamma=\infty$，则

$$\bar{\pi}_{i0}=1,\ i\geqslant 0,\quad \bar{\pi}_{ij}=0,\ i\geqslant 0,j\geqslant 1;$$

ii) 若 $\gamma<\infty$，则

$$\bar{\pi}_{i0}=y_i^{(0)},\ i\geqslant 0,\quad \bar{\pi}_{ij}=0,\ i\geqslant 0,j\geqslant 1.$$

疑 难 解 析

生灭过程的概率的意义是什么？

答 由生灭过程的转移概率 $p_{ij}(t)$的性质可以知，如果忽略 t 的高阶无穷小量，生灭过程即种群群体的状态变化有三种可能：(1)由状态 $i\to i+1$，即增加了一个个体，概率是 $\lambda_i t$；(2)由状态 $i\to$

$i-1$，即减少了一个个体，概率是 $\mu_i t$；(3) $i\to i$，即群体个数无变化. 由此可以得出，生灭过程的所有状态是互通的，但在充分小的时间内，只能在两个相邻状态内变化，或者状态无变化.

方法、技巧与典型例题分析

我们知道，对于转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}(t)=(p_{ij}(t),i\,j\in I),$$

满足

$$p_{ij}(t)\geqslant 0,\quad \sum_{j\in I}p_{ij}(t)=1,$$

$$p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in I}p_{ik}(s)p_{kj}(t).$$

当极限

$$\lim_{t\to 0^+}p_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j\end{cases}$$

存在时，$\boldsymbol{P}(t)$称为**标准转移概率矩阵**. 当 $\boldsymbol{P}(t)$只满足

$$p_{ij}(t)\geqslant 0,\quad \sum_{i\in I}p_{ij}(t)\leqslant 1,\quad p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in I}p_{ik}(s)p'_{kj}(t)$$

时，称为**准转移概率矩阵**.

例 1 设$\{X(t),t\in[0,\infty)\}$是一个状态空间为 $I=\{0,1,2,\cdots\}$的纯灭过程，密度矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0 & & & & \\ \mu_1 & -\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & -\mu_2 & & \\ & & \mu_3 & -\mu_3 & \\ & & & \ddots & \ddots\end{bmatrix},$$

证明：(1) $\overline{\boldsymbol{P}}(t)=(\overline{p}_{ij}(t),i,j\geqslant 0)=(\sum_{n\geqslant 0}p_{ij}^{(n)}(t),i,j\geqslant 0)$ 是标准转移概率矩阵；

(2) $\boldsymbol{P}(t)$由 $\boldsymbol{Q}$ 唯一决定，且 $\boldsymbol{P}(t)=\overline{\boldsymbol{P}}(t)$.

证 (1)因为若 $\overline{\boldsymbol{P}}(t)$是标准转移概率矩阵与方程$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$，$y\geqslant 0$，$\sup\limits_i y_i<\infty$，$\lambda>0$ 只有零解等价(其中 $\boldsymbol{I}=(\delta_{ij},i,j\geqslant 0)$，$\boldsymbol{Y}$

$=(y_0,y_1,\cdots)^{-1},\boldsymbol{I}=(0,0,\cdots)^{-1})$.

要使 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$,

即
$$\begin{cases}\lambda y_0=0,\\ -\mu_1 y_0+(\lambda+\mu_1)y_1=0,\\ \cdots\cdots\\ -\mu_n y_{n-1}+(\lambda+\mu_n)y_n=0,\\ \cdots\cdots\end{cases}$$

只有 $y_n\equiv 0\ (n\geqslant 0)$,即 $\overline{\boldsymbol{P}}(t)$是标准转移概率.

(2) 设 $\boldsymbol{P}(t)=(p_{ij}(t),i,j\in I)$是$\{X(t),t\in[0,\infty)\}$的转移概率矩阵,则因为 $\boldsymbol{P}(t)\geqslant\overline{\boldsymbol{P}}(t)\ (t\geqslant 0)$(由 $p_{ij}(t)\geqslant\overline{p}_{ij}(t)$).设存在 i_0,j_0 和 t_0,使 $p_{i_0j_0}(t_0)>\overline{p}_{i_0j_0}(t_0)$,则由 $\boldsymbol{P}(t)$与 $\overline{\boldsymbol{P}}(t)$皆为转移概率矩阵,可得

$$1\geqslant\sum p_{i_0j_0}(t_0)=p_{i_0j_0}(t_0)+\sum_{i\neq j}p_{i_0j_0}(t_0)$$
$$>\overline{p}_{i_0j_0}(t_0)+\sum_{j\neq j_0}\overline{p}_{ij}(t_0)=\sum_{j=0}^{\infty}\overline{p}_{i_0j}(t_0)=1.$$

推出矛盾,故 $\boldsymbol{P}(t)=\overline{\boldsymbol{P}}(t)$.

例 2 设$\{X(t),t\in[0,\infty)\}$是纯灭过程时,$\overline{\boldsymbol{P}}(t)\triangleq(\overline{p}_{ij}(t),i,j\in I)$,证明:

$$\overline{\boldsymbol{P}}_{ij}(t)=\begin{cases}0, & j>i,\\ e^{-\mu_j t}, & j=i,\\ e^{-\mu_j t}\int_0^t e^{\mu_j t}\mu_j\overline{p}_{i-1\,j}(s)\mathrm{d}s, & i>j.\end{cases}$$

证 令 $$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0 & & & \\ & \mu_1 & & \\ & & \mu_2 & \\ & & & \ddots\end{bmatrix}$$

$$S = Q + D = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \mu_1 & 0 & & \\ & \mu_2 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \Delta(t) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & e^{-\mu_1 t} & & \\ & & e^{-\mu_2 t} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$\Delta(t-u)S = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \mu_1 e^{-\mu_1(t-u)} & 0 & & \\ & \mu_2 e^{-\mu_2(t-u)} & & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

再令 $P_0(t) = \Delta(t)$, $P_n(t) = \int_0^t \Delta(t-u) S P_{n-1}(u) \mathrm{d}u \ (n \geqslant 1)$,

则
$$\overline{P}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t).$$

记
$$P_n(t) = (p_{ij}^{(n)}(t),\ i,j \geqslant 0),$$
$$\Delta(t)S = (\alpha_{ij}(t),\ i,j \geqslant 0),$$
$$\Delta(t)SP_n(t) = (\beta_{ij}^{(n)}(t,u),\ i,j \geqslant 0),$$

则
$$\alpha_{ij}(t) \equiv 0, j \geqslant i, \quad p_{ij}^{(0)}(t) = 0,\ j > i.$$

设 $p_{ij}^{(n)}(t) \equiv 0$, $j-n<j$,则可以得出

$$\beta_{ij}^{(n)}(t,u) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{ik}(t) p_{kj}^{(n)}(u)$$
$$= \sum_{k=j+1}^{i} \alpha_{ik}(t) p_{kj}^{(n)}(u) \equiv 0,\ j+n+1 > i.$$

故
$$p_{ij}^{(n+1)}(u) = \int_0^t \beta_{ij}^{(n)}(t-u) u \,\mathrm{d}u \equiv 0,\ j+n+1 > i.$$

综上所述有
$$p_{ij}^{(n)}(t) \equiv 0, \quad j+n > i.$$

而
$$\overline{p}_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}(t) \Rightarrow \overline{p}_{ij}(t) = 0, \quad j > i, t \in [0,\infty).$$

又
$$\overline{P}'(t) = QP(t), \quad t \in [0,\infty),$$

得
$$\overline{p}'_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{ik} \overline{p}_{kj}(t) = \sum_{k=j}^{\infty} q_{ik} \overline{p}_{kj}(t)$$

$$= \begin{cases} -\mu_i \bar{p}_{ij}(t), & i = j, \\ \mu_i \bar{p}_{i-1\,j}(t) - \mu_i \bar{p}_{ij}(t), & i > j. \end{cases}$$

注意到 $\bar{p}_{ij}(t) = \bar{\delta}_{ij}$，解之可得

$$\bar{p}_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\mu_i t}, & i = j, \\ e^{-\mu_i t} \int_0^t e^{\mu_i s} \mu_i \bar{p}_{i-1\,j}(s) ds, & i > j. \end{cases}$$

例 3 当例 2 纯灭过程中 $\mu_n = n\mu$（线性死亡率）时，证明：

$$\bar{p}_{ij}(t) = \begin{cases} 0, & i < j, \\ e^{-i\mu t}, & i = j, \\ C_i^{i-j} (e^{-\mu t})^i (1 - e^{-\mu t})^{i-j}, & i > j. \end{cases}$$

证 固定 $j \geqslant 0$. 当 $i = j + 1$ 时，有

$$\bar{p}_{j+1,j}(t) = e^{-(j+1)\mu t} \int_0^t e^{(j+1)\mu s} (j+1) \mu e^{-j\mu s} ds$$

$$= e^{-(j+1)\mu t} (j+1)(e^{\mu t} - 1) = C'_{j+1} (e^{-\mu t})^j (1 - e^{-\mu t}).$$

依归纳法，设 $\bar{p}_{j+k\,j}(t) = C_{j+k}^k (e^{-\mu t})^j (1 - e^{-\mu t})^k$，则

$$\bar{p}_{j+k+1\,j}(t) = e^{-(j+k+1)\mu t} \int_0^t e^{-(j+k+1)\mu s} (j+k+1) \mu \bar{p}_{j+k\,j}(s) ds$$

$$= C_{j+k+1}^{k+1} (e^{-\mu t})^j (1 - e^{-\mu t})^{k+1},$$

即

$$\bar{p}_{ij}(t) = C_i^{i-j} (e^{-\mu t})^i (1 - e^{-\mu t})^{i-j}, \quad i > j.$$

前两种情形同例 2.

例 4（电话问题的爱尔朗（Erlang）公式） 某交换台有 s 条中继线，区内用户与区外通话要通过中继线. 由于用户数量很大，可以认为不管占用了几条中继线，不通话的用户数可看做是不变的，因此，假定在 $(t, t + \Delta t)$ 内又有一用户要同区外通话的概率是 $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$，与正在通话的户数无关. 若中继线有空则接通，否则用户的要求被取消. 而在时刻 t 正与区外通话的用户能在 $(t, t + \Delta t)$ 内结束通话，从而空出一条中继线的概率是 $\mu \Delta t + o(\Delta t)$. 设各用户与区外通话是独立的，若用 $X(t)$ 表示时刻 t 正在使用的中继线条数，则 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是齐次马尔可夫过程，求其平稳分布并导

出爱尔朗公式.

解 转移概率为

$$p_{i\,i+1}(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t),\quad i=0,1,\cdots,s-1,$$

$$p_{i\,i-1}(\Delta t)=\mu i\Delta t+o(\Delta t),\quad i=1,2,\cdots,s,$$

$$p_{i\,i}(\Delta t)=1-(\lambda+\mu i)\Delta t+o(\Delta t),\quad i=0,1,\cdots,s-1,$$

$$p_{s\,s}(\Delta t)=1-s\mu\Delta t+o(\Delta t),$$

$$p_{i\,j}(\Delta t)=0,\quad |i-j|>1.$$

显然,$X(t)$是一个生灭过程.

$$\lambda_i=\lambda,\quad i=0,1,\cdots,s-1,$$

$$\mu_i=i\mu,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

其平稳分布$\boldsymbol{\pi}=(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_s)$为

$$\pi_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\pi_0=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0,\quad k=1,\cdots,s,$$

$$\pi_0=\left[1+\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}=\left[\sum_{k=0}^{s}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}.$$

于是,得到爱尔朗公式

$$\pi_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\Big/\sum_{l=0}^{s}\frac{1}{l!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^l,\quad k=1,\cdots,s.$$

例 5(酶的产生过程) 设有大量实验样品,每个样品包含一个酶分子和母体物质.若在$(t,t+\Delta t)$内形成第二个酶分子的样品数与时刻t未形成第二个酶分子的样品数成正比,且与时刻t无关.任一包含一个酶分子的样品在$(t,t+\Delta t)$内产生第二个酶分子的概率为$\lambda\Delta t+o(\Delta t)$.设在时间间隔$\Delta t$内增加两个或更多酶分子的概率是$o(\Delta t)$.令$X(t)$表示时刻$t$系统中的酶分子数,则$\{X(t),t\geqslant 0\}$是齐次马尔可夫过程,证明:$X(t)$是纯生过程.

证 转移概率为

$$p_{i\,i+1}(\Delta t)=i\lambda\Delta t+o(\Delta t),\quad i\geqslant 0,$$

$$p_{i\,i}(\Delta t)=1-i\lambda\Delta t+o(\Delta t),\quad i\geqslant 0,$$

$$p_{i\,i-1}(\Delta t)=o(\Delta t),\quad i\geqslant 1,$$

$$p_{ij}(\Delta t)=o(\Delta t),\quad |i-j|>1,$$

由此可以得出

$$q_{i\,i+1}=i\lambda,\quad i\geqslant 0,\quad q_i=i\lambda,\quad i\geqslant 0,$$

$$q_{i\,i-1}=0,\quad i\geqslant 1,\quad q_{ij}=0,\quad |i-j|>1.$$

所以 $X(t)$是纯生过程.

例 6 设$\{X(t),t\in[0,\infty)\}$是一个有线性生殖率的纯生过程,若 $P\{X(0)=k\}=p(1-p)^{k-1}$,即 $X(0)$服从参数为 p 的几何分布$(k\geqslant 1)$,求 $E[X(t)]$和 $D[X(t)]$.

解 因为 $X(t)$是纯生过程,有公式

$$E[X(t+s)-X(s)\mid X(s)=m]=me^{\lambda t}(1-e^{-\lambda t}),$$

$$D[X(t+s)-X(s)\mid X(s)=m]=me^{-2\lambda t}(1-e^{-\lambda t}),$$

$$\begin{aligned}&D[X(t+s)-X(s)\mid X(s)=m]\\&\triangleq E[(X(t+s)-X(s))^2\mid X(s)=m]\\&\quad-\{E[X(t+s)-X(s)\mid X(s)=m]\}^2,\end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned}E[X(t)-X(0)]&=\sum_{n=0}^{\infty}E[X(t)-X(0)\mid X(0)=n]P\{X(0)=n\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{\lambda t}(1-e^{-\lambda t})p(1-p)^{n-1}\\&=e^{\lambda t}p(1-e^{-\lambda t})\sum_{n=1}^{\infty}n(1-p)^{n-1}.\end{aligned}$$

由 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big)'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

得 $$E[X(t)-X(0)]=p^{-1}e^{\lambda t}(1-e^{-\lambda t}).$$

而 $$E[X(0)]=\sum_{n=1}^{\infty}np(1-p)^{n-1}=p^{-1},$$

$$E[X(t)]=p^{-1}[e^{\lambda t}(1-e^{-\lambda t})+1]=p^{-1}e^{-\lambda t},$$

$$D[X(t)]=E[X(t)^2]-\{E[X(t)]\}^2$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} n^2 C_{n-1}^{n-m} (e^{-\lambda t})^m (1 - e^{-\lambda t})^{n-m} - p^{-2} e^{-2\lambda t}.$$

例 7 设$\{X(t), t \in [0, \infty)\}$是一个纯生过程，满足 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$，转移概率矩阵为 $\boldsymbol{P}(t)$，$\boldsymbol{\pi} = \lim_{t \to \infty} \boldsymbol{P}(t)$，证明：

(1) 若 $\lambda_0 = 0$，则

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{bmatrix};$$

(2) 若 $\lambda_0 > 0$，则 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$.

证 (1)若 $\lambda_0 = 0$，有

$$\lim_{t \to \infty} p_{00}(t) = \lim_{t \to \infty} e^{-\lambda_0 t} = 1;$$

$$\lim_{t \to \infty} p_{ii}(t) = \lim_{t \to \infty} e^{-\lambda_i t} = 0, \quad i \geqslant 1;$$

$$\lim_{t \to \infty} p_{0j}(t) = 0,\ j \geqslant 1; \quad \lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = 0,\ j < i.$$

当 $j > i \geqslant 1$ 时，有

$$p_{i\,i+1}(t) = e^{-\lambda_{i+1} t} \int_0^t e^{\lambda_{i+1} s} \lambda_i e^{-\lambda_i s} ds,$$

故

$$\lim_{t \to \infty} p_{i\,i+1}(t) = 0, \quad i \geqslant 1.$$

对 j 作归纳法，设$\lim_{t \to \infty} p_{i\,j-1}(t) = 0$，$j - 1 > i \geqslant 1$，对 $j - 1 > i \geqslant 1$ 和任意 $\varepsilon > 0$，取 T，使得 $p_{i\,j-1}(s) < \varepsilon$，$s \geqslant T$，则

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= e^{-\lambda_j t} \int_0^t e^{\lambda_j s} \lambda_{j-1} p_{i\,j-1}(s) ds \\ &\leqslant e^{-\lambda_j t} \int_0^T e^{\lambda_j s} \lambda_{j-1} ds + e^{-\lambda_j t} \int_T^t e^{\lambda_j s} \lambda_{j-1} ds, \end{aligned}$$

在上式中令 $t \to \infty$，得

$$\begin{aligned} \limsup_{t \to \infty} p_{ij}(t) &\leqslant \lambda_{j-1} \varepsilon \limsup_{t \to \infty} \int_T^t e^{-\lambda_j (t-s)} ds \\ &\leqslant \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} \varepsilon, \quad j - 1 > i \geqslant 1. \end{aligned}$$

由于 ε 是可以任意小的正数，所以

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=0,\quad j-1>i\geqslant 1.$$

归纳法完成. 综合以上结论，即命题得证.

(2) 可用类似方法证得，请读者一试.

例 8($M/M/S$ 排队问题) 某货运港有 s 个装卸船台，在时刻 t 到达的货轮数 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程. 到达时若有空闲船台，立即进行装卸服务，否则需排队等候直到空出船台后接受服务. 设每条船的服务时间 T 都服从负指数分布，即

$$\boldsymbol{P}(T\leqslant t)=\begin{cases}1-e^{-\mu t}, & t\geqslant 0,\\ 0 & t<0,\end{cases}$$

并设各船装卸时间相互独立，且与 $N(t)$ 独立. 用 $X(t)$ 表示时刻 t 进港的货船数.

(1) 证明 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是齐次马尔可夫过程；

(2) 证明 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是一个生灭过程；

(3) 求其平稳分布；

(4) 对港口的装卸进行定量分析.

证 (1) 由于在时刻 t 港内的货船数与 $t+\Delta t$ 时到达的货船数是相互独立的(因为泊松分布的独立增量性)，而时刻 t 正在装卸的货船在 $t+\Delta t$ 时是否结束服务也与该船在时刻 t 前已服务时间无关(因为负指数分布的无记忆性)，所以 $X(t)$ 是一个马尔可夫过程. 又由

$$\begin{aligned}
&P\{X(t+\Delta t)=i\mid X(t)=i\}\\
&=P\{N(\Delta t)=0,A(\Delta t)=0\mid X(t)=i\}\\
&\quad+P\{\bigcup_{k=1}^{\min(i,s)}\{N(\Delta t)=k,A(\Delta t)=k\mid X(t)=i\}\}\\
&=P\{N(\Delta t)=0,\bigcap_{k=1}^{\min(i,s)}\{T_k>\Delta t\mid X(t)=i\}+o(\Delta t)\}\\
&=\begin{cases}e^{-\lambda\Delta t}e^{-i\mu\Delta t}+o(\Delta t)=1-(\lambda+i\mu)\Delta t+o(\Delta t), & i\leqslant s,\\ e^{-\lambda\Delta t}e^{-s\mu\Delta t}+o(\Delta t)=1-(\lambda+is)\Delta t+o(\Delta t), & i>s.\end{cases}
\end{aligned}$$

类似地，有

$$P\{X(t+\Delta t)=i-1 \mid X(t)=i\}$$

$$=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda\Delta t}(1-\mathrm{e}^{-i\mu\Delta t})+o(\Delta t)=i\mu\Delta t+o(\Delta t), & 1\leqslant i\leqslant s, \\ \mathrm{e}^{-\lambda\Delta t}(1-\mathrm{e}^{-s\mu\Delta t})+o(\Delta t)=s\mu\Delta t+o(\Delta t), & i>s; \end{cases}$$

$$P\{X(t+\Delta t)=i+1 \mid X(t)=i\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t), \quad i\geqslant 0.$$

故由上面三式可知，从 t 到 $t+\Delta t$ 的转移概率与 t 无关，过程是齐次马尔可夫过程.

(2) 由于

$$q_i=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}=\begin{cases} \lambda+i\mu, & i\leqslant s, \\ \lambda+s\mu, & i>s, \end{cases}$$

$$q_{i\,i+1}=\lambda, \quad i\geqslant 0, \quad q_{i\,i-1}=\begin{cases} i\mu, & i\leqslant s, \\ s\mu, & i>s, \end{cases}$$

$$q_{ij}=0, \ |i-j|\geqslant 2,$$

所以，$X(t)$是一个生灭过程.

(3) 柯尔莫哥洛夫向后方程为

$$\begin{cases} p'_{ij}(t)=-(\lambda+i\mu)p_{ij}(t)+i\mu p_{i-1\,j}(t)+\lambda p_{i+1\,j}(t), & 0\leqslant i\leqslant s, \\ p'_{ij}(t)=-(\lambda+s\mu)p_{ij}(t)+s\mu p_{i-1\,j}(t)+\lambda p_{i+1\,j}(t), & i>s. \end{cases}$$

因为
$$\lambda_i=\lambda, \quad \mu_i=\begin{cases} i\mu, & 0\leqslant i\leqslant s, \\ s\mu, & i>s, \end{cases}$$

依公式可得

$$\pi_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\pi_0=\begin{cases} \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0, & 0\leqslant k\leqslant s, \\ \dfrac{1}{s!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k\dfrac{1}{s^{k-s}}\pi_0, & k>s. \end{cases}$$

故当$\dfrac{\lambda}{s\mu}<1$时，存在平稳分布. $\lambda<s\mu$ 就是单位时间内到达港口的货船平均数少于 s 个船台上装卸完货物的平均货船数. 这时

$$\pi_0=\left[1+\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k+\frac{\lambda}{s!(s\mu-\lambda)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\right]^{-1}.$$

将 π_0 代入 π_k，即得平稳分布 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots)$.

(4)讨论：货船到港无需等待的概率是

$$a_1=P\{x(t)\leqslant s-1\}=\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_{s-1};$$

需等待两条或两条以上货船装卸完的概率是

$$a_2=P\{x(t)\geqslant s+1\}=1-(\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_s);$$

在港口内排队等候的货船平均数是

$$b_1=\sum_{k=1}^{\infty}k\pi_{s+k};$$

在港口内轮船的平均数是 $b_2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\pi_k$.

取定几个 s,λ,μ 的数值得一数据表如下：

s	λ	μ	a_1	a_2	b_1	b_2
1	18	20	0.1	0.81	8.1	9
1	18	40	0.55	0.2025	0.37	0.818
1	9	20	0.55	0.2025	0.37	0.818
2	18	20	0.72	0.1257	0.23	1.1285
2	18	10	0.147	0.7674	0.7	9.47

例如，从数据表可知，若 λ 相同，装卸效率提高一倍，则货船无需等待的概率可由 0.1 提高到 0.55；而等待的货船平均数从 8.1 条减少到 0.37 条.

例 9 设 $\{x(t),t\in[0,\infty)\}$ 是一个有线性生殖率与线性死亡率的生灭过程，密度矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}-\lambda_0 & \lambda_0 & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & \\ & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix},$$

且 $\lambda_n=n\lambda,\mu_n=n\mu,n\geqslant1,\lambda>0,\mu>0$. 设 $\boldsymbol{P}(t)=(P_{ij}(t),i,j\geqslant0)$ 是

转移概率矩阵，$\overline{\boldsymbol{P}}(t)=(\overline{P}_{ij}(t),i,j\geqslant 0)$而 $\overline{P}_{ij}(t)=\sum_{n\geqslant 0}P_{ij}^{(n)}(t),i,j\geqslant 0$. 证明：$\boldsymbol{P}(t)=\overline{\boldsymbol{P}}(t)$，并求出$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{P}(t)$.

证 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_n}{\lambda_k\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu^{n-k}}{k\lambda^{n-k+1}}=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n}=\infty,$$

则(见主要内容 5)$\boldsymbol{P}(t)=\overline{\boldsymbol{P}}(t)$.

当 $\lambda_0>0$ 时， 令

$$\rho_0=1,\quad \rho_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}=\frac{\lambda_0\lambda^{n-1}}{n\mu^n},$$

则
$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0}{\mu}\right)\frac{\lambda^{n-1}}{n\mu^{n-1}}$$

$$=1+\frac{\lambda_0}{\mu}+\ln(1-\frac{\lambda}{n})<\infty,\quad \lambda<\mu,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n=\infty,\ \mu=\lambda.$$

又
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\rho_n}=\infty,$$

则依定理，有

$$\lim_{t\to\infty}P_{ij}(t)=\overline{\pi}_{ij}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda_0\lambda^{i-1}}{i\mu^i}\left[1+\dfrac{\lambda_0}{\mu}+\ln(1-\dfrac{\lambda}{\mu})\right]^{-1}, & \mu>\lambda,\\ 0, & \mu=\lambda.\end{cases}$$

当 $\lambda_0=0$ 时，有

$$Y=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k=\infty,\quad \mu\geqslant\lambda.$$

于是，由定理可得

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \bar{\pi}_j = \begin{cases} 1, & i \geqslant 0,\ j = 0, \\ 0, & i \geqslant 0,\ j \geqslant 1. \end{cases}$$

第四节　马尔可夫序列与扩散过程

主要内容

一、马尔可夫序列

一个随机变量序列 X_n，若对任意的 n，有

$$F(x_n \mid x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1) = F(x_n \mid x_1),$$

则称 X_n 为**马尔可夫序列**. 它是时间参数离散，状态空间连续的马尔可夫过程.

1. 在马尔可夫序列中，若已知现在，则将来与过去相互独立，即

$$f(x_n, x_s \mid x_r) = f(x_n \mid x_r) f(x_s \mid x_r), \quad n > r > s.$$

2. 马尔可夫序列的转移概率密度满足方程

$$f(x_n \mid x_s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_n \mid x_r) f(x_r \mid x_s) \mathrm{d}x_r, \quad n > r > s.$$

3. 如果一个 n 维向量随机序列 $\{x(k), k \in \mathbf{N}^+\}$ 既是正态的，又是马尔可夫序列，则称之为**正态(高斯)-马尔可夫序列**. 其正态性决定了它们的幅度概率分布，而马尔可夫性决定了序列在时间上的传播.

设高斯-马尔可夫序列为 $X(n+1) = AX(n) + W(n)$，其中 A 为常数，$W(n)$ 为正态白噪声，其均值为 $m_W(n)$，方差为 $\sigma_W^2(n)$. 若 $X(n)$ 取值为 x_n，则转移概率为 $f(x_{n+1} \mid x_n)$，它也是正态的.

4. 正态-马尔可夫过程的数字特征.

条件均值　$E[X(n+1) \mid x_n] = Ax_n + m_W(n)$,

条件方差　$D[X(n+1)|x_n]=\sigma_W^2(n)$,

均　　值　$E[X(n+1)]=Am_x(n)+m_V(n)$,

方　　差　$D[X(n+1)]=A^2\sigma_X^2(n)+\sigma_W^2(n)$,

协方差　$C_X(n,s)=E\{[X(n)-m_X(n)][X(s)-m_X(s)]\}$

$$=A^{n-s}\sigma_X^2(s).$$

如果 $X(n)$是平稳序列,则

$$C_X(n,s)=A^{|n-s|}\sigma_X^2.$$

二、连续马尔可夫过程

状态和时间参数均连续变化的马尔可夫过程称为**连续马尔可夫过程**,又称为**扩散过程**.

1. 设$\{X(t),t\in T\}$是一个随机过程,若对每个 n 和 T 中的 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$,有

$$F(x_n,t_n\mid x_{n-1},t_{n-1};x_{n-2},t_{n-2};\cdots;x_1,t_1)=F(x_n,t_n\mid x_{n-1},t_{n-1}),$$

则称$\{X(t),t\in T\}$是连续马尔可夫过程.

上式也可用概率密度函数等价地表示为

$$f(x_n,t_n\mid x_{n-1},t_{n-1};x_{n-2},t_{n-2};\cdots;x_1,t_1)=f(x_n,t_n\mid x_{n-1},t_{n-1}).$$

2. 连续马尔可夫过程的统计特性完全由其一阶、二阶分布函数决定:

$$\begin{aligned}&f(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)\\&=f_1(x_1,t_1)\prod_{k=1}^{n-1}f_2(x_{k+1},t_{k+1}\mid x_k,t_k)\\&=\left[\prod_{k=1}^{n-1}f_2(x_k,t_k;x_{k+1},t_{k+1})\right]\Big/\left[\prod_{k=2}^{n}f_1(x_k,t_k)\right].\end{aligned}$$

3. 连续马尔可夫过程的转移概率是

$$P\{s,x;t,A\}=P\{X(t)\in A\mid X(s)=x\},\quad s,t\in T,s<t.$$

其中 A 为状态空间 I 的一个子集. 当 $A=(-\infty,y)$时,有

$$P\{s,x;t,(-\infty,y)\}=P\{X(t)<y\mid X(s)=x\}.$$

一般地,将 $P\{s,x;t,(-\infty,y)\}$记为

$$F(s,x;t,y)=F(t,y|s,x)=P\{X(t)<y|X(s)=x\},$$

称为连续马尔可夫过程的**转移概率分布**.

若 $F(s,x;t,y)$ 关于 y 的导数存在,则

$$f(s,x;t,y) = f(t,y \mid s,x) = \frac{\partial}{\partial y}F(s,x,t,y)$$

称为连续马尔可夫过程的**转移概率密度**.有

$$F(s,x;t,y) = \int_{-\infty}^{y} f(s,x;t,u)\mathrm{d}u.$$

若 $$F(s,x;t,y) = F(t-s;x,y) = F(\tau;x,y),$$

则称过程为**齐次的连续马尔可夫过程**.

4. 设 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 的转移概率分布函数是 $F(s,x;t,y)$,由连续性知,当 Δt 很小时. $X(t+\Delta t)-X(t)$ 也很小. 即,对任意 $\delta>0$,有

$$\lim_{\Delta t\to 0} P\{\mid X(t+\Delta t) - X(t) \mid > \delta \mid X(t) = x\} = 0$$

或 $$\lim_{\Delta t\to 0} \int_{|y-x|>\delta} f(t,x;t+\Delta t,y)\mathrm{d}y = 0.$$

一般加强条件,即对任意 $\delta>0,\Delta t>0$,要求

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|\geqslant\delta} f_y(t,x;t+\Delta t,y)\mathrm{d}y = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|\geqslant\delta} f_y(t-\Delta t,x;t,y)\mathrm{d}y = 0, \quad ①$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|<\delta} (y-x) f_y(t,x;t+\Delta t,y)\mathrm{d}y = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|<\delta} (y-x) f_y(t-\Delta t,x;t,y)\mathrm{d}y = a(t,x), \quad ②$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|<\delta} (y-x)^2 f_y(t,x;t+\Delta t,y)\mathrm{d}y = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|<\delta} (y-x)^2 f_y(t-\Delta t,x;t,y)\mathrm{d}y = b(t,x), \quad ③$$

满足式①,②,③的马尔可夫过程是**扩散过程**. 其中

$$f(t,x;t+\Delta t,y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}_y F(t,x;t+\Delta t,y).\ a(t,x)$$

称为**偏移系数**，$b(t,x)$称为**扩散系数**，均不依赖于 δ.

5. C-K 方程

$$f(x_n,t_n \mid x_s,t_s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_n,t_n \mid x_r,t_r) f(x_r,t_r \mid x_s,t_s) \mathrm{d}x,$$

$$t_n > t_r > t_s.$$

方法、技巧与典型例题分析

关于马尔可夫序列与连续马尔可夫过程的理论及公式都比较复杂. 这里只通过几个比较简单的例题作初步的介绍，需要进一步了解的读者请阅读更专业的书籍.

例 1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是独立随机变量序列，概率密度函数 $f_{x_n}(x)=f_n(x)$，若令

$$Y_1 = X_1, Y_2 = X_1 + X_2, \cdots, Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

证明：$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$是马尔可夫序列.

证 因为

$$f(y_1,y_2) = f_{Y_2}(y_2 \mid Y_1 = y_1) f_{Y_1}(y_1),$$

又由已知条件得

$$f_{Y_1}(y_1) = f_{X_1}(y_1) = f_1(y_1),$$

$$\begin{aligned} f_{Y_2}(y_2|Y_1=y_1) &= f_{X_1+X_2}(y_2|X_1=y_1) \\ &= f_{X_2}(X_2=y_2-y_1|x_1=y_1) = f_{X_2}(y_2-y_1) \\ &= f_2(y_2-y_1), \end{aligned}$$

故
$$f(y_1,y_2) = f_1(y_1) f_2(y_2-y_1).$$

推广到 n 个随机变量，有

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n) = f_1(y_1)f_2(y_2-y_1)\cdots f_n(y_n-y_{n-1}),$$

而 $f(y_n|y_{n-1},y_{n-2},\cdots,y_1) = \dfrac{f(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{f(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})} = f_n(y_n-y_{n-1})$.

于是知，$f(y_n|y_{n-1},y_{n-2},\cdots,y_1)$与 $y_{n-2},\cdots,y_1$ 无关，所以$\{Y_n\}$是一个马尔可夫序列.

例 2 已知一个独立随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$，有

$$f_{X_n}(x) = f_n(x).$$

令 $\quad Y_1 = X_1, Y_2 = X_1 + X_2, \cdots, Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，

若 $E[X_n] = 0$，X_n 与 Y_{n-1} 独立，证明：

$$E[Y_n \mid Y_{n-1}, Y_{n-2}, \cdots, Y_1] = Y_{n-1}.$$

证 由例 1 知，$\{Y_n\}$是一个马尔可夫序列

$$\begin{aligned} & E[Y_n \mid Y_{n-1}, Y_{n-2}, \cdots, Y_1] \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} y_n f(y_n \mid y_{n-1}, y_{n-2}, \cdots, y_1) \mathrm{d}y_n \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} y_n f(y_n \mid y_{n-1}) \mathrm{d}y_n = E[Y_n \mid Y_{n-1}]. \end{aligned}$$

又因为 $\quad Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_n + \sum_{i=1}^{n-1} X_i = X_n + Y_{n-1}.$

故 $$\begin{aligned} E[Y_n \mid Y_{n-1}] &= E[X_n + Y_{n-1} \mid Y_{n-1}] \\ &= E[X_n \mid Y_{n-1}] + E[Y_{n-1} \mid Y_{n-1}] = E[Y_{n-1} \mid Y_{n-1}]. \end{aligned}$$

设 X 是任一随机变量，$g(x)$ 是一已知函数，由条件数学期望的定义，有

$$E[g(X) \mid x] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p[g(x) \mid x] \mathrm{d}x,$$

所以 $\quad P\{g(x) \mid X = x\} = 1, P\{g(x) \mid X \neq x\} = 0,$

故 $\quad E[g(x) \mid x] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(X - x) \mathrm{d}x = g(X).$

若令 $X = Y_{n-1}$，$g(X) = Y_{n-1}$，则有 $E[Y_{n-1} \mid Y_{n-1}] = Y_{n-1}$，从而证得

$$E[Y_n \mid Y_{n-1}, Y_{n-2}, \cdots, Y_1] = Y_{n-1}.$$

例 3 证明 C-K 方程，即证明：对于 $t_1 < t_2 < t_3$，马尔可夫过程 $X(t)$ 的转移概率满足

$$P_{X_3 \mid X_1}(x_3 \mid x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{X_3 \mid X_2}(x_3 \mid x_2) P_{X_2 \mid X_1}(x_2 \mid x_1) \mathrm{d}x_2.$$

证 由马尔可夫性，有

$$P(x_3, x_2, x_1) = P_{X_3 \mid X_2, X_1}(x_3 \mid x_2, x_1) P_{X_2 \mid X_1}(x_2 \mid x_1) P_{X_1}(X_1)$$

$$=P_{X_3,X_2|X_1}(x_3,x_2|x_1)P_{X_1}(x_1),$$

故

$$P_{X_3,X_2|X_1}(x_3,x_2|x_1)$$
$$=P_{X_3|X_2,X_1}(x_3|x_2,x_1)P_{X_2|X_1}(x_2|x_1),$$

于是 $P_{X_3|X_1}(x_3 \mid x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}P_{X_3,X_2|X_1}(x_3,x_2 \mid x_1)\mathrm{d}x_2$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}P_{X_3|X_2}(x_3 \mid x_2)P_{X_2|X_1}(x_2 \mid x_1)\mathrm{d}x_2,$$

即知 C-K 方程成立.

例 4 给定一个随机过程 $X(t)$及时刻 $t_1<t_2$. 若对任意时刻 $t<t_1$, $X(t)$都与 $X(t_2)-X(t_1)$相互独立,证明:$X(t)$是一马尔可夫过程.

证 记

$$X_0=X(t),X_1=X(t_1),X_2=X(t_2),\boldsymbol{X}=(X_0,X_1,X_2)^{\mathrm{T}};$$
$$Y_0=X_0,Y_1=X_1,Y_2=X_2-X_1,\boldsymbol{Y}=(Y_0,Y_1,Y_2)^{\mathrm{T}},$$

则

$$|J|=\left|\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{X}}\right|=1,$$

$$P_{\boldsymbol{X}}(x_0,x_1,x_2)=P_{\boldsymbol{Y}}(y_0,y_1,y_2) \mid J \mid = P_{\boldsymbol{Y}}(y_0,y_1,y_2)$$
$$=P_{\boldsymbol{Y}}(x_0,x_1,x_2-x_1)=P(x_0,x_1)P(x_2-x_1),$$

故

$$P_{\boldsymbol{X}}(x_2|x_1,x_0)=\frac{P_{\boldsymbol{X}}(x_2,x_1,x_0)}{P(x_1,x_0)}$$
$$=\frac{P(x_1,x_0)P(x_2-x_1)}{P(x_1,x_0)}=P(x_2-x_1).$$

显然上式与 X_0 无关,所以 $X(t)$是马尔可夫过程.

例 5 实值随机过程$\{X(t),t\in T\}$满足:

1) 具有独立增量,即对任意 $t_1<t_2<\cdots<t_n(n>2,t_i\in T)$,各增量 $X(t_2)-X(t_1),X(t_3)-X(t_2),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$相互独立;

2) $X(t)-X(s)$服从 $N(0,\sigma^2|t-s|)$分布,则称为维纳-爱因斯坦(Wiener-Einstein)过程. 证明:$X(t)$是扩散过程.

证 设 $X(0)=0$,由增量的独立性和 $X(s)=s$ 知,$X(t)-$

$X(s)=X(t)-s$ 与一切 $X(u)=X(u)-X(0)$ $(0\leqslant u\leqslant s<t)$独立，故确定 $X(t)$是马尔可夫过程. 并且

$$\begin{aligned}F(s,x;t,y)&=P\{X(t)\leqslant y\mid X(s)=x\}\\&=P\{X(t)-X(s)\leqslant y-x\mid X(s)-X(0)=x\}\\&=P\{X(t)-X(s)\leqslant y-x\}\\&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{y-x}\mathrm{e}^{-u^2/[2\sigma^2(t-u)]}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{y}\mathrm{e}^{-(z-x)^2/[2\sigma^2(t-s)]}\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

这时，主要内容二第 4 点中的式①,②,③分别成为

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|\geqslant\delta}f(t,x;t+\Delta t,y)\mathrm{d}y\\&=\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|\geqslant\delta}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2/[2\sigma^2\Delta t]}\mathrm{d}y\\&\leqslant\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta t\delta^4}\int_{|y-x|\geqslant\delta}(y-x)^4\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2/[2\sigma^2\Delta t]}\mathrm{d}y\\&\leqslant\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta t\delta^4}\int_{-\infty}^{\infty}(y-x)^4\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2/[2\sigma^2\Delta t]}\mathrm{d}y\\&=\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta t\delta^4}3\sigma^4(\Delta t)^2=0,\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|<\delta}(y-x)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2/[2\sigma^2\Delta t]}\mathrm{d}y=0,$$

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|<\delta}(y-x)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2/[2\sigma^2\Delta t]}\mathrm{d}y\\&=\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty}(y-x)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2/[2\sigma^2\Delta t]}\mathrm{d}y=\sigma^2.\end{aligned}$$

看到 $a(t,x)=0,b(t,x)=\sigma^2$，所以 $X(t)$ 满足三个条件，是扩散过程.

例 6 若信号模型 $\dot{X}(t)=\alpha X(t)+\beta W(t)$的时间参数是连续

变化的，$W(t)$为白色高斯过程. 其均值和协方差分别为

$$m_W(t) = E[W(t)],$$

$$C_W(t,s) = E\{[W(s) - m_W(s)][W(t) - m_W(t)]\}$$
$$= \sigma_W^2(t)\delta(t-s).$$

$\{X(t), t \in T\}$是连续高斯-马尔可夫过程. 证明：

(1)$\dot{m}_X(t) = \alpha m_X(t) + \beta m_W(t)$；

(2)若令 $V_X(t) = \sigma_X^2(t)$，则 $\dot{V}_X(t) = 2\alpha V_X(t) + \beta^2 \sigma_W^2(t)$.

证 (1)对 $\dot{X}(t) = \alpha X(t) + \beta W(t)$两式取期望，得

$$E[\dot{X}(t)] = \alpha E[X(t)] + \beta E[W(t)],$$

即
$$\dot{m}_X(t) = \alpha m_X(t) + \beta m_W(t).$$

(2)因为 $V_X(t) = \sigma_X^2(t) = E\{[X(t) - m_X(t)]^2\}$，对等式两边微分，得

$$\begin{aligned}\dot{V}_X(t) &= 2E[X(t) - m_X(t)][\dot{X}(t) - \dot{m}_X(t)] \\ &= 2E[X(t) - m_X(t)] \\ &\quad \cdot [\alpha X(t) - \alpha m_W(t) + \beta W(t) - \beta m_W(t)] \\ &= 2\alpha V_X(t) + 2\beta E[X_1(t) W_1(t)].\end{aligned}$$

式中 $X_1(t) = X(t) - m_X(t)$，$W_1(t) = W(t) - m_W(t)$. 依定义得

$$X(t_n) = e^{\alpha(t_n - t_{n-1})} X(t_{n-1}) + \beta\int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{\alpha(t_n - t_{n-1})} W(s) ds.$$

将 $X_1(t)$与 $W_1(t)$代入，有

$$X_1(t) = e^{\alpha(t-t_0)} X_1(t_0) + \beta\int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} W(s) ds.$$

于是 $E[X_1(t) W_1(t)]$

$$= e^{\alpha(t-t_0)} E[X_1(t_0) W_1(t)] + \beta\int_{t_0}^{t} \alpha^{(t-s)} W(s) ds.$$

因为 $X(t_0)$与 $W(t)$不相关，故等式右边第一项为零，第二项为

$$\int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} E[W_1(t) W_1(s)] ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} \sigma_W^2(s)\delta(t-s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\sigma_W^2(t),$$

所以 $$E[X_1(t)W_1(t)] = \frac{1}{2}\beta\sigma_W^2(t).$$

代回即得 $$\dot{V}_X(t) = 2\alpha V_X(t) + \beta^2\sigma_W^2(t).$$

文中"依定义得"句指对 $\dot{X}(t)=\alpha X(t)+\beta W(t)$ 求微分方程的解.

例 7(具有偏移的布朗运动) 设齐次扩散过程的偏移系数与扩散系数均为常数,$a(x)=\mu, b(x)=\sigma^2>0$,求柯尔莫哥洛夫方程的解和转移概率密度函数.

解 柯尔莫哥洛夫向前方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mu\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

状态空间为$(-\infty,\infty)$,边界条件为

$$\lim_{y\to\infty} f(t,x,y) = 0, \quad \lim_{y\to\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(t,x,y) = 0,$$

用特征函数(即傅里叶变换)解方程,令

$$\varphi(t,x,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\theta y} f(t,x,y)\mathrm{d}y, \ t>0,$$

$$\varphi(0,x,\theta) = e^{j\theta x}.$$

$\varphi(0,x,\theta)=e^{j\theta x}$ 即为单点(退化)分布的特征函数. 由 $\varphi(t,x,\theta)$ 是 t 的连续函数和边界条件,得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\theta y}\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = -j\theta\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\theta y} f\mathrm{d}y = -j\theta\varphi(t,x,\theta),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\theta y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y = (-j\theta)^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\theta y} f\mathrm{d}y = -\theta^2\varphi(t,x,\theta).$$

向前方程转化为一阶线性常微分方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = (j\mu\theta - \frac{\sigma^2}{2}\varphi^2)\varphi,$$

结合 $\varphi(0,x,\theta)=e^{j\theta x}$ 可以求得微分方程的解

$$\varphi(t,x,\theta)=\exp\left[\mathrm{j}x\theta+\mathrm{j}\mu t\theta-\frac{\sigma^2 t}{2}\theta^2\right]$$

恰为正态分布 $N(x+\mu t,\sigma^2 t)$ 的特征函数. 故

$$f(t,x,y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left[\frac{-(y-x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right].$$

若 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是标准布朗运动,则 $Y=\{Y_1=\sigma X(t)+\mu t,t\geqslant 0\}$ 为马尔可夫过程,上式即为转移概率密度函数. 向前方程的解称为有偏移的布朗运动. 这时,马尔可夫过程可以看做下列随机微分方程的解:

$$\begin{cases}\mathrm{d}Y(t)=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}X(t),\\ Y(0)=y,\end{cases}$$

其中 μ 为常数,X 为标准布朗运动,y 是起点.

例 8 设 $\{X(t),t\in[0,\infty)\}$ 的转移函数是

$$P(s,x;t,y)$$
$$\triangleq\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t-s)}}\displaystyle\int_{-\infty}^{y}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(t-s)}\right\}^2\mathrm{d}y, & 0\leqslant s\leqslant t,\\ \boldsymbol{I}_{(-\infty|y)}(x), & s=t,\end{cases}$$

证明:此马尔可夫过程是扩散过程,并求出偏移系数 $a(t,x)$ 和扩散系数 $b(t,x)$.

证 因为

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty}(x-y)^4 f(t,x;t+\Delta t,y)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty}(x-y)^4\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2\Delta t}\right\}^2\mathrm{d}y=3\sigma^4\Delta t,$$

于是对固定的 δ 及 $i=0,1,2$,有

$$\int\limits_{|y-x|>\delta}(x-y)^i f(t,x;t+\Delta t,y)\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\frac{1}{\delta^{4-i}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-y)^4 f(t,x;t+\Delta x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\delta^{4-i}}3\sigma^4(\Delta t)^2,$$

$$a(t,x)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|\leqslant\delta}(y-x)f(t,x;t+\Delta t,y)\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty}(y-x)f(t,x;t+\Delta t,y)\mathrm{d}y=0,$$

$$b(t,x)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|\leqslant\delta}(y-x)^2 f(t,x;t+\Delta t,y)\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty}(y-x)^2 f(t,x;t+\Delta t,y)\mathrm{d}y=\sigma^2.$$

所以，扩散过程的三个条件都满足，此马尔可夫过程是扩散过程，且偏移系数 $a(t,x)=0$，扩散系数 $b(t,x)=\sigma^2$.

例 9 当偏移系数 $a(t,y)\equiv 0$，扩散系数 $b(x,y)\equiv 1$ 时，求由向前方程与边界条件

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t,x;y)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(t,x;y)$$

$$f(t,x;y)\to 0,\quad \frac{\partial}{\partial y}f(t,x;y)\to 0\ (|y|\to\infty)$$

所决定的随机过程的密度函数.

解 令 $\varphi(t,\theta;x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}t\theta}f(t,x;y)\mathrm{d}y$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta y}\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta y}f\Big|_{-\infty}^{\infty}-\mathrm{j}\theta\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta y}f(t,x;y)\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{j}\theta\varphi(t,\theta;x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y=-\theta^2\varphi(t,\theta;x).$$

对 $\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ 两边取拉普拉斯变换，并利用上式可得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{1}{2}\theta^2\varphi,$$

即有

$$\varphi(t,\theta;x)=a\exp\left\{-\frac{\theta^2 t}{2}\right\},$$

$$f(0,x;y)=\delta(y-x)=\begin{cases}\infty, & y=x,\\ 0, & y\neq x,\end{cases}$$

则 $$\varphi(0,\theta;x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\theta y}\delta(y-x)dy = e^{j\theta x},$$

从而 $$\varphi(t,\theta;x) = \exp\left\{\frac{1}{2}(j\theta t - \theta^2 t)\right\},$$

所以 $$f(t,x;y) = (2\pi t)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\}$$

即为所求随机过程的密度函数.

例 10 设$\{X(t),t\in[0,\infty)\}$是齐次扩散过程,$X(0)\equiv x_0>0$,且 $P(t,x_0;x)=1-P(t,-x_0;x)$. 令 $T=\min\{t:X(t)<0\}$,证明:

(1) $$P(t,x_0;0)=\int_0^t g(s,x_0;0)P(t-s,0;0)ds,$$

其中 $G(t,x_0;0)\triangleq P(T\leqslant t)$; $g(s,x_0;0)=d_y G(s,x_0;0)$;

(2) $G(t,x_0;0)=2P(t,x_0;0)$.

证 (1)因为

$$\begin{aligned}P(t,x_0;0) &= P(X(t)\leqslant 0 \mid X(0)=x_0)\\ &= \int_0^{\infty} g(s,x_0;0)P(X(t)\leqslant 0 \mid X(0)=x_0, T=s)ds,\end{aligned}$$

而 $$\begin{aligned}&P(X(t)\leqslant 0 \mid X(0)=x_0,T=s)\\ &= \begin{cases}P(X(t)\leqslant 0 \mid X(s)=0), & s\leqslant t,\\ 0, & s>t,\end{cases}\end{aligned}$$

故 $$P(t,x;0) = \int_0^t g(s,x_0;0)P(t-s,0;0)ds.$$

(2)由 $$P(t,x_0;x)=1-P(t,-x_0;-x)$$

得 $P(t,0;0)=1/2$,代入题(1)的结果即得

$$P(t,x_0;0) = \frac{1}{2}G(t,x_0;0).$$

第五章　随机分析与随机微分方程

第一节　二阶矩过程与均方极限

主要内容

一、二阶矩过程

1. 如果随机过程$\{X(t),t\in T\}$对任意$t\in T$,有

$$m(t)=E[X(t)]<\infty,\ D(t)=E\{[X(t)-m(t)]^2\}<\infty,$$

则该过程称为**二阶矩过程**.

为简便起见,设二阶矩过程是复二阶矩过程,且其均值为零.

2. 二阶矩过程的协方差函数总存在,且

$$\mathrm{Cov}(X(t_1),X(t_2))=E\{E[X(t_1)-m(t_1)][\overline{X(t_2)-m(t_2)}]\},$$

由此得出其相关函数也总存在.

3. 二阶矩过程的相关函数具有下列性质:

(1)设$\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程,则相关函数

$$R_X(t_2,t_1)=\overline{R_X(t_1,t_2)};$$

若$X(t)$是实二阶矩过程,则$R_X(t_1,t_2)=R_X(t_2,t_1)$,即相关函数是对称的.

(2)二阶矩过程的相关函数$R_X(t_1,t_2)$具有非负定性,即对于任意有限个$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$和n个复数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}R_X(t_k,t_m)\lambda_k\bar{\lambda}_m\geqslant 0,$$

其中n为任意正整数. 其矩阵形式为

$$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\begin{bmatrix}R_X(t_1,t_1) & R_X(t_1,t_2) & \cdots & R_X(t_1,t_n)\\ R_X(t_2,t_1) & R_X(t_2,t_2) & \cdots & R_X(t_2,t_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ R_X(t_n,t_1) & R_X(t_n,t_2) & \cdots & R_X(t_n,t_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\lambda}_1\\ \bar{\lambda}_2\\ \vdots\\ \bar{\lambda}_n\end{bmatrix}\geqslant 0.$$

4. 概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上具有二阶矩的随机变量称为**二阶矩随机变量**(也称**二阶矩变量**),其全体记为 H.

H 是 $\mathbf{C}$(或 $\mathbf{R}$)上的线性空间.

二、均方极限

1. 若对二阶矩随机序列$\{X_n(e)\}$,有使

$$\lim_{n\to\infty}X_n(e)=X(e)$$

成立的 e 的集合的概率为 1,即

$$P\{e:\lim_{n\to\infty}X_n(e)=X(e)\}=1,$$

称二阶矩随机序列$\{X_n(e)\}$以概率 1 收敛于 $X(e)$,或称$\{X_n(e)\}$几乎处处收敛于 $X(e)$,记为 $X_n\xrightarrow{a,e}X$.

2. 若对任给 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n(e)-X(e)|\geqslant\varepsilon\}=0,$$

则称二阶矩随机序列$\{X_n(e)\}$依概率收敛于二阶矩随机变量 $X(e)$,记为 $X_n\xrightarrow{P}X$.

3. 若有二阶矩随机序列$\{X_n\}$和二阶矩随机变量 X,使得

$$\lim_{n\to\infty}E[|X_n-X|^2]=0,$$

则称$\{X_n\}$均方收敛于 X,或称序列$\{X_n\}$的均方极限为 X,记为

$$\text{l. i. m}\,X_n=X \text{ 或 } X_n\xrightarrow{m.s}X.$$

4. 设有二阶矩随机序列$\{X_n\}$,$\{Y_n\}$,$\{Z_n\}$,X,Y,Z,U 为二阶矩随机变量,$\{C_n\}$为常数序列,a,b,c 为常数,且 $\text{l. i. m}\,X_n=X$,$\text{l. i. m}\,Y_n=Y$,$\text{l. i. m}\,Z_n=Z$,$\lim\limits_{n\to\infty}C_n=C$,则有:

(1) $\text{l. i. m}\,C_n=\lim\limits_{n\to\infty}C_n=C$;　(2) $\text{l. i. m}\,U=U$;

(3) $\text{l.i.m}\,(C_nU)=CU$; (4) $\text{l.i.m}(aX_n+bY_n)=aX+bY$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}E[X_n]=E[X]=E[\text{l.i.m}\,X_n]$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}E[X_nY_n]=E[XY]=E[(\text{l.i.m}\,X_n)(\text{l.i.m}\,Y_n)]$,

特别地,有$\lim\limits_{n\to\infty}E[|X_n|^2]=E[|X|^2]=E[|\text{l.i.m}\,X_n|^2]$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}E[X_n\bar{Y}_n]=E[X\bar{Y}]$ (可作为(6)的特例).

5. 均方极限是唯一的.

6. 设有二阶矩随机序列$\{X_n\}$和二阶矩随机变量 X,则$\{X_n\}$均方收敛于 X 的充要条件是

$$\lim_{n,m\to\infty}E[|X_n-X_m|^2]=0,$$

该条件称为**柯西(Cauchy)准则**.

7. 设有二阶矩随机序列$\{X_n\}$和二阶矩随机变量 X,则$\{X_n\}$均方收敛于 X 的充要条件是

$$\lim_{n,m\to\infty}E[X_n\bar{X}_m]=C\text{(常数)},$$

该条件称为**洛弗(Loéve)准则**.

8. 设有二阶矩随机序列$\{X_n\}$和二阶矩随机变量 X,且 $\text{l.i.m}\,X_n=X$. 又设 $t(u)$是一个确定性函数,且满足李普希兹(Lipschtz)条件,即

$$|t(u)-t(v)|\leqslant M|u-v|,$$

其中 M 为某常数. 若$\{t(X_n)\}$和 $t(X)$均为二阶矩随机变量,则有

$$\text{l.i.m}\,t(X_n)=t(X).$$

设 $\text{l.i.m}\,X_n=X$,则对任意有限的 t,有 $\text{l.i.m}\exp(\mathrm{j}t\boldsymbol{X}_n)=\exp(\mathrm{j}tX)$. 即若$\{X_n\}$均方收敛于 X,则 X_n 的特征函数收敛于 X 的特征函数,从而 X_n 的分布函数收敛于 X 的分布函数.

疑 难 解 析

1. 怎样理解二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$的协方差函数的性质?

答 在一些教材中,有的是讨论 $X(t)$的相关函数$R_X(t_1,t_2)$的

性质，有的是讨论 $X(t)$ 的协方差函数 $C_X(t_1,t_2)$ 的性质，其实两者是一样的. 因为，对于二阶矩过程，有

$$R_X(t_1,t_2)=C_X(t_1,t_2)=1+t_1t_2,\quad t_1,t_2\in T.$$

协方差函数有以下两个性质：

(1)埃尔米特性，即对任意 $t,s\in T$，总有

$$C_X(s,t)=\overline{C_X(t,s)};$$

(2)非负定性，即对任意正整数 n，任意的 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 和任意的复值函数 $Q(t)$，$t\in T$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_X(t_k,t_j)Q(t_k)\overline{Q(t_j)}\geqslant 0.$$

非负定性成立，可以保证埃尔米特性成立，因而协方差函数最本质的特性就是非负定性.

二阶矩存在定理更指出：在 $T\times T$ 上给定一个二元函数 $C_X(s,t)$，如果它是非负定的，则一定存在一个二阶矩过程(而且是正态过程)$\{X(t),t\in T\}$，使得 $C_X(s,t)$ 恰是其协方差函数. 当 $C_X(s,t)$ 是实函数时，相应的随机过程也是实随机过程.

2. 为什么对二阶矩随机序列 $\{X_n,t\in T\}$ 和二阶矩随机变量 X，若 $\mathrm{l.i.m}\,X_n=X$，则

$$\lim_{n\to\infty}E[X_n]=E[\mathrm{l.i.m}\,X_n]=E(X)?$$

答 该问题可以转化为：为什么取平均与取极限可交换次序？因为，对题设的 X_n 和 X，有

$$|E[X_n]-E[X]|=|E[X(n)-X]|\leqslant E|X(n)-X|.$$

由施瓦兹不等式，得

$$|E[X(n)]-E[X]|\leqslant E[|X(n)-X|]\leqslant\sqrt{E[|X(n)-X|^2]},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}|E[X(n)]-E[X]|\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{E[|X(n)-X|^2]}=0$，

即 $$\lim_{n\to\infty}E[X_n]=E[X]=E[\mathrm{l.i.m}\,X(n)].$$

但应注意的是，先取极限是指取均方极限.

方法、技巧与典型例题分析

在第一章第四节中已讨论过关于二阶矩过程的例题.事实上，正态随机过程，平稳过程（宽平稳过程）和正交增量过程都是二阶矩过程，所以，我们将有些问题放到有关章节去讨论.下面来讨论二阶矩随机序列的极限.

例 1 设有一个二阶矩随机序列$\{X(n)\}$，$X(n)$的相关函数为$R_X(n_1,n_2)=E[X(n_1)\overline{X(n_2)}]$.若有序列$\{a_n\}$，$n=1,2,\cdots$，并定义$Y(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kX(k)$，问：在什么条件下，$Y(n)$是均方收敛序列？

解
$$E[Y(n)\overline{Y(m)}]$$
$$=E\Big[\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_k\bar{a}_iX(k)\overline{X}(i)\Big]$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_k\bar{a}_iE[X(k)\overline{X(i)}]=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_k\bar{a}_iR_X(k,i).$$
依洛弗准则，如果$\{Y_n\}$均方收敛，应有
$$\lim_{n\to\infty}E[Y(n)\overline{Y(m)}]=C\text{（常数）},$$
即应有
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_k\bar{a}_iR_X(k,i)=c\text{（常数）},$$
也就是级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_k\bar{a}_iR_X(k,i)$应收敛.

例 2 设$\{X_n\}$是一随机变量序列，X是随机变量.若$\forall\varepsilon>0$，当$n\to\infty$时，X_n满足
$$P\{|X_n-X|>\varepsilon\}\to 0,$$
则称X_n依概率收敛于X.证明：若$\mathrm{l.i.m}\,X_n=X$，则$X_n\xrightarrow{P}X$.

证 若$\mathrm{l.i.m}\,X_n=X$，则$\lim\limits_{n\to\infty}E[|X_n-X|^2]=0$，由契比雪夫不等式
$$P\{|X_n-X|>\varepsilon\}\leqslant\{E[|X_n-X|^2]\}/\varepsilon^2$$

可知，当 $n\to\infty$ 时，$E[|X_n-X|^2]\to 0$，则 $\forall\varepsilon>0$，必有 $P\{|X_n-X|>\varepsilon\}\to 0$. 所以，若 X_n 均方收敛于 X，则必依概率收敛于 X.

例 3 证明均方极限的唯一性.

证 设$\{X(n)\}$是二阶矩随机序列，X,Y 是二阶矩变量，且 $\lim\limits_{n\to\infty}X(n)=X$，$\lim\limits_{n\to\infty}X(n)=Y$. 因为

$$E\{[X(n)-Y][\overline{X(n)-Y}]\}$$

$$=E[X(n)\overline{X(n)}]-E[Y\overline{X(n)}]-E[X(n)Y]+E[Y\overline{Y}],$$

对上式两边取极限 $n\to\infty$，左边用 $X(n)\to X$ 代入，右边用 $X(n)\to Y$ 代入，则左边为

$$E\{[X(n)-Y][\overline{X(n)-Y}]\xrightarrow{n\to\infty}E[(X-Y)\overline{(X-Y)}]\}$$

$$=E[|X-Y|^2],$$

右边为

$$E[X(n)]-\overline{X(n)}-E[Y\overline{X(n)}]-E[X(n)\overline{Y}]+E[Y\overline{Y}]$$

$$\longrightarrow E[Y\overline{Y}-EY\overline{Y}]-E[Y\overline{Y}]+E[Y\overline{Y}]=0,$$

所以 $$E[|X-Y|^2]=0,$$

即 $X=Y$，故均方极限是唯一的.

例 4 设有二阶矩随机序列$\{X(n)\}$和二阶矩变量 X，$f(n)$是普通函数，且满足李普希兹条件：$|f(u)-f(v)|\leqslant M|u-v|$，其中 M 是一正常数，证明：

$$\mathrm{l.i.m}f(X_n)=f(X).$$

特别地，$X(n)$的特征函数等于 X 的特征函数.

证 由李普希兹条件，有

$$|f(X_n)-f(X)|^2\leqslant M^2|X(n)-X|^2,$$

于是 $$E[|f(X_n)-f(X)|^2]\leqslant M^2E[|X(n)-X|^2].$$

因为 $$\lim_{n\to\infty}E[|X(n)-X|^2]=0,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}E[|f(X_n)-f(X)|^2]=0,$$

即 $$\mathrm{l.i.m}\,f(X_n)=X_n.$$

若取 $f(u)=e^{jtu}$,因为对有限的 t,总有

$$|f'(u)|=|jte^{jtu}|\leqslant|t|,$$

所以 $$|f(u)-f(v)|\leqslant|t||u-v|,$$

即 $$\text{l.i.m}\ e^{jtX_n}=e^{jtX}.$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}E[e^{jtX(n)}]=E[e^{jtX}],$$

即 $X(n)$的特征函数收敛于 X 的特征函数.

例 5 设 $Y_1,Y_2,\cdots$是独立同分布随机变量序列,$E[Y_1]=\mu$, $D[Y_1]=\sigma^2$. 令 $X(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$,证明:

$$\text{l.i.m}\ X_n=\mu.$$

证 因为

$$\begin{aligned}&E[|X(n)-\mu|^2]\\&=E\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i-\mu\right|^2\right]=\frac{1}{n^2}E\left[\left|\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu)\right|^2\right]\\&=\frac{1}{n}E[|Y_i-\mu|^2],\end{aligned}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}E[|X(n)-\mu|^2]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}E[|Y_i-\mu|^2]=0,$$

所以 $$\text{l.i.m}\ X_n=\mu.$$

此例又称为均方极限下的**大数定律**.

例 6 设 $\boldsymbol{X}^{(n)}=(X_1^{(n)},X_2^{(n)},\cdots,X_k^{(n)})$是$k$ 维实正态随机变量,如果 $\boldsymbol{X}^{(n)}$均方收敛于 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_k)^{\mathrm{T}}$,即对每一个 i,有

$$\lim_{n\to\infty}\text{l.i.m}\ X_i^{(n)}=X,\quad 1\leqslant i\leqslant k,$$

则 $\boldsymbol{X}$ 也是正态随机变量.

证 将 $\boldsymbol{X}^{(n)}$,$\boldsymbol{X}$ 的均值与协方差阵分别记为

$$\boldsymbol{\mu}^{(n)}=E[\boldsymbol{X}^{(n)}]=(\mu_1^{(n)},\mu_2^{(n)},\cdots,\mu_k^{(n)})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\mu}=E[\boldsymbol{X}]=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)^{\mathrm{T}},$$

$$B^{(n)}=E\{[\boldsymbol{X}^{(n)}-\boldsymbol{\mu}^{(n)}][\boldsymbol{X}^{(n)}-\boldsymbol{\mu}^{(n)}]^{\mathrm{T}}\}=(\sigma_{ij}^{(n)}),$$

$$B = E\{[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}][\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}]^{\mathrm{T}}\} = (\sigma_{ij}),$$

其中$(\sigma_{ij}^{(n)})$，(σ_{ij})分别表示以$\sigma_{ij}^{(n)}$，$\sigma_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,k)$为元素的矩阵，而显然有

$$\lim_{n\to\infty}\mu_i^{(n)} = \mu_i,\quad 1\leqslant i\leqslant k,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant k.$$

若用$\varphi_n(\boldsymbol{v})$和$\varphi(\boldsymbol{v})$分别表示$\boldsymbol{X}^{(n)}$和$\boldsymbol{X}$的特征函数，则必有

$$\varphi_n(\boldsymbol{v}) = \exp\left(\mathrm{j}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}^{(n)} - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}B^{(n)}\boldsymbol{v}\right).$$

两边对n取极限，得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\boldsymbol{v}) &= \exp\left(\mathrm{j}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{v}^{(n)} - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\lim_{n\to\infty}B^{(n)}\boldsymbol{v}\right)\\ &= \exp\left(\mathrm{j}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{v}\right).\end{aligned}$$

另一方面，应有$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\boldsymbol{v})=\varphi(\boldsymbol{v})$，所以

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = \exp\left(\mathrm{j}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{v}\right).$$

于是，由特征函数的唯一性定理知，$\boldsymbol{X}$必是正态随机变量.

第二节　随机过程的均方连续与均方导数

主要内容

一、随机过程的均方连续

1. 设$\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程，若对某确定的$t\in T$，有

$$\underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\, X(t+h) = X(t),\quad t,t+h\in T,$$

则称二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$在t处连续. 若$\{X(t),t\in T\}$在T中每一个t处都均方连续，则称二阶矩过程在T上**均方连续**.

2. 二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$在t处均方连续的充要条件是：协

方差函数 $C_X(s,t)$在(t,t)处连续.

有些教材中也写成:相关函数 $R_X(s,t)$在(t,t)处连续.

若 $C_X(s,t)$(或 $R_X(s,t)$)在(t,t)处连续,则 $X(t)$在 $t\in T,s\in T$ 上均方连续.

3. 若二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$是均方连续的,则

$$\lim_{h\to 0}E[X(t+h)]=E[X(t)],$$

即在均方连续的条件下,取平均与取极限(均方极限)是可以交换顺序的.

4. 若$\{X(t),t\in T\}$是宽平稳过程,则以下条件是等价的:

(1) $\{X(t),t\in T\}$均方连续;

(2) $\{X(t),t\in T\}$在 $t=0$ 处均方连续;

(3) 相关函数 $R_X(\tau)$(或协方差函数 $C_X(\tau)$)在$-\infty<\tau<\infty$上连续;

(4) 相关函数 $R_X(\tau)$(或协方差函数 $C_X(\tau)$)在 $\tau=0$ 连续.

二、随机过程的均方导数

1. 设$\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程,对于确定的 $t\in T$,若存在随机过程$\{X'(t),t\in T\}$,使得

$$\mathrm{l.i.m}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}=X'(t)=\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t},$$

则称$\{X(t),t\in T\}$在 t 处**均方可微**,$X'(t)$为$\{X(t),t\in T\}$在 t 处的**均方导数**.均方导数是唯一的.

若$\{X(t),t\in T\}$在 T 上每个 t 处都有导数,则称$\{X(t),t\in T\}$在 T 上均方可微.若$\{X'(t),t\in T\}$在 t 处均方可微,则记为$X''(t)$,称为 $X(t)$的二阶均方导数.类似可定义 n 次均方可微,记为 $X^{(n)}(t)$.

2. 设 $f(s,t)$是普通二元函数,如果下列极限存在:

$$\lim_{h,h'\to 0}\frac{f(s+h,t+h')-f(s+h,t)-f(s,t+h')-f(s,t)}{hh'},$$

则称 $f(s,t)$在点(s,t)处**广义二阶可导**.极限值称为 $f(s,t)$在点(s,t)处的**广义二阶导数**.

3. 广义二阶导数存在的充分条件是：如果 $f(s,t)$ 关于 s 和 t 的一阶偏导数存在，二阶混合偏导数存在且连续，则 $f(s,t)$ 是广义二阶可导的，且广义二阶导数就等于二阶混合偏导数.

4. **均方可微准则**　二阶矩过程 $\{X(t),t\in T\}$ 在 t 处均方可微的充要条件是协方差函数 $C_X(s,t)$（或相关函数 $R_X(s,t)$）在 (t,t) 处广义二阶可微.

二阶矩过程 $\{X(t),t\in T\}$ 在 T 上均方可微的充要条件是协方差函数 $C_X(s,t)$（或相关函数 $R_X(s,t)$）(t,t) 处广义二阶导数存在.

5. 如果 $C_X(s,t)$ 在一切 $\{(t,t),t\in T\}$ 上广义二阶可微，则 $\frac{\partial}{\partial s}C_X(s,t)$，$\frac{\partial}{\partial t}C_X(s,t)$，$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}C_X(s,t)$，$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}C_X(s,t)$ 在 $T\times T$ 上存在，且

$$\frac{\partial}{\partial s}C_X(s,t)=\frac{\partial}{\partial s}E[X(s)\overline{X(t)}]=E[X'(s)\overline{X(t)}],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}C_X(s,t)=\frac{\partial}{\partial t}E[X(s)\overline{X(t)}]=E[X(s)\overline{X'(t)}],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}C_X(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}C_X(s,t)=E[X'(s)\overline{X'(t)}],$$

若将 $C_X(s,t)$ 改写为 $R_X(s,t)$，上述式子仍成立.

6. 若二阶矩过程 $\{X(t),t\in T\}$ 是 n 次均方可微的，则 $\{X(t),t\in T\}$ 在 t 处的 n 阶均方导数的均值存在，且

$$E\left[\frac{\mathrm{d}^n X(t)}{\mathrm{d}t^n}\right]=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}E[X(t)],$$

即求均方导数与期望运算可交换顺序.

7. 若二阶矩过程 $\{X(t),t\in T\}$ 在 t 处均方可微，则它在 t 处均方连续.

8. 若二阶矩过程 $\{X(t),t\in T\}$ 与 $\{Y(t),t\in T\}$ 在 t 处均方可微，a,b 为常数，则有均方导数

$$[aX(t)+bX(t)]'=aX'(t)+bY'(t).$$

9. 若二阶矩过程 $\{X(t),t\in T\}$ 均方可微，$f(t)$ 是一普通可微

函数，则 $f(t)X(t)$ 均方可微，且有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)X(t)] = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}X(t) + f(t)\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}, \quad t \in T.$$

10. 若 C 为常数或随机变量，则 C 的均方导数为零；若二阶矩过程 $\{X(t), t\in T\}$ 均方可微，则 $X(t)+C$ 也均方可微，且

$$[X(t)+C]' = X'(t).$$

疑 难 解 析

均方导数与普通函数导数有哪些相同点与相异点？

答 均方导数虽然也称为导数，但与普通函数导数在定义上是完全不同的. 普通函数 $f(t)$ 的导数 $f'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ 是函数增量与自变量增量之比. 当自变量增量趋向于零时的极限，反映函数 $f(t)$ 在 t 处的变化率. 而均方导数反映的是，若随机过程 $X(t)$ 的所有样本函数都能使 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$ 存在，则 $X'(t)$ 就是它导数的样本函数. 但这条件限制太严，于是就利用柯西准则来定义：如果

$$\lim_{\Delta t,\Delta h\to 0} E\left[\left|\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t} - \frac{X(t+\Delta h)-X(t)}{\Delta h}\right|^2\right] = 0,$$

则称 $X(t)$ 可以在均方意义下可导，记为

$$\mathrm{l.i.m}\,\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t} = X'(t).$$

其均方导数 $X'(t)$ 也是一个随机过程. 所以，两者在定义与实际意义上相去甚远.

但在性质上，两者还是有许多相同之处. 如，若 $f(t)$ 在 t 处可导，则 $f(t)$ 在 t 处连续，对随机过程 $X(t)$，若 $X(t)$ 在 t 处均方可导，则 $X(t)$ 在 t 处均方连续. 除此之外，均方导数还有许多类似普通函数导数的性质，如均方导数的唯一性，任一随机变量或常数的

均方导数为零，$[aX(t)+bY(t)]'=aX'(t)+bY'(t)$，$[f(t)X(t)]'=f'(t)X(t)+f(t)X'(t)$等. 然而，两者也有许多不同之处，如均方可微准则和数学期望运算与求导运算可以交换次序等性质是普通函数求导运算所没有的，读者一定要认真理解和掌握.

方法、技巧与典型例题分析

均方连续与均方导数都是随机分析的基本概念，牢牢把握住这些概念并将它们应用于随机过程之中，是我们要努力做到的. 以下例题给出了一些解决实际问题的方法与技巧，请读者认真体会.

例 1 设$\{X(t),t\geqslant 0\}$，$X(0)=0$ 是泊松过程，讨论其均方连续性.

解 因为$\{X(t),t\geqslant 0\}$是泊松过程，所以有

$$P\{X(t)-X(s)=k\}=e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!},\ k=0,1,\cdots,t>s.$$

令 $s=0$，则有 $E[X(t)]=\lambda t$. 当 $s<t$ 时，有

$$\begin{aligned}C_X(s,t)&=E\{[X(s)-\lambda s][X(t)-\lambda t]\}\\&=E\{[X(s)-\lambda s]\{[X(s)-\lambda s]\\&\quad+[X(t)-\lambda t]-[X(s)-\lambda s]\}\}\\&=E\{[X(s)-\lambda s]^2\}=D[X(s)]^2=\lambda s.\end{aligned}$$

当 $s>t$ 时，类似可得 $C_X(s,t)=\lambda t$，故

$$C_X(s,t)=\lambda\min\{s,t\},$$

$$R_X(s,t)=C_X(s,t)+m(s)m(t)=\lambda\min\{s,t\}+\lambda^2 st.$$

由于 $C_X(s,t)$（或 $R_X(s,t)$）在$\{(t,t),t\geqslant 0\}$处二元连续，所以，泊松过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$在 $t\geqslant 0$ 时均方连续.

注意 均方意义下的在 t_0 处连续是指随机地取出一些样本函数 $X(t)$，它在 t_0 处间断的概率为零. 这与在通常意义下的连续有所不同.

例 2 设有二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$，$R_X(s,t)$是相关函数，证明：$R_X(s,t)$在(t,t)连续，则它在 $T\times T$ 上连续.

证 若 $R_X(s,t)$在(t,t)连续，则 $X(t)$在 t 处均方连续，所以，对 $s,t,s+h,t+h_1\in T$，有

$$\text{l.i.m}\, X(s+h) = X(s), \quad \text{l.i.m}\, X(t+h_1) = X(t).$$

依二阶矩过程的均方收敛性质，得

$$\lim_{h,h_1\to\infty} R_X(s+h,t+h_1) = \lim_{h,h_1\to 0} E[X(s+h)\,\overline{X(t+h_1)}]$$

$$= E[X(s)\,\overline{X(t)}] = R_X(s,t),$$

即 $R_X(s,t)$在 $T\times T$ 上连续.

本例说明，二阶矩过程在 T 上的均方连续性与其相关函数(或协方差函数)在 $T\times T$ 上的连续性等价. 而相关函数(或协方差函数)在 $T\times T$ 上的连续性又等价于它在对角线$\{(t,t),t\in T\}$上的连续性.

例 3 证明：$\{X(t),t\in T\}$在 $t=0$ 处均方连续与其协方差函数 $C_X(\tau)$在 $\tau=0$ 处连续等价.

证 $|C_X(h)-C_X(0)| = |E[X(h)\overline{X(0)}]-E[X(0)\overline{X(0)}]|$

$$= |E\{[X(h)-X(0)]\overline{X(0)}\}|$$

$$\leqslant \sqrt{E[|X(h)-X(0)|^2]E[|X(0)|^2]},$$

设$\{X(t),t\in T\}$在 $t=0$ 处均方连续，则

$$\lim_{h\to 0} E[|X(h)-X(0)|^2] = 0,$$

从而得$\lim\limits_{h\to 0}|C_X(h)-C_X(0)|=0$，即协方差函数 $C_X(\tau)$在 $\tau=0$ 连续. 又因为

$$E[|X(h)-X(0)|^2] = 2C_X(0)-C_X(h)-\overline{C_X(h)}$$

$$\leqslant |C_X(h)-C_X(0)| + |\overline{C_X(h)}-C_X(0)|,$$

设协方差函数 $C_X(\tau)$在 $\tau=0$ 处连续，则

$$\lim_{h\to 0}|C_X(h)-C_X(0)| = 0, \quad \lim_{h\to 0}|\overline{C_X(h)}-C_X(0)| = 0.$$

所以 $$\lim_{h\to 0}E[|X(h)-X(0)|^2]=0.$$

从而知$\{X(t),t\in T\}$在 $t=0$ 处连续. 于是命题得证.

例 4 设有随机过程$\{X(t),t\in[0,1]\}$,定义

$$P\{X(0)=0\}=1,\ X(t)=Y_j,\ \frac{1}{2^j}<t\leqslant\frac{1}{2^{j-1}},\ j=1,2,\cdots,$$

其中$\{Y_j\}$是独立同分布随机变量序列,$E[Y_1]=0,D[Y_1]=1$,讨论 $X(t)$的均方可微性.

解 显然 $$E[X(t)]=0,$$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$

$$=\begin{cases}E[Y_j^2]=1,\ \frac{1}{2^j}<t,\ s\leqslant\frac{1}{2^{j-1}},\ j=1,2,\cdots,\\ 0,\qquad 其它.\end{cases}$$

易知$\frac{\partial}{\partial s}R(0,0)=0=\frac{\partial}{\partial t}R(0,0),\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R(0,0)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R(0,0)=0$,但$R_X(s,t)$不是广义二次可微的. 这是因为,有

$$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R(t,s)=E[X'(s)X'(t)]$$

$$=\lim_{h,h_1\to 0}\frac{1}{h}\left[\lim_{h_1\to 0}\left(\frac{R(s+h,t+h_1)-R(s+h,t)}{h_1}-\frac{R(s,t+h_1)-R(s,t)}{h_1}\right)\right],$$

若取 $h_1=h$,则上式成为

$$\lim_{h\to 0}\frac{[R(h,h)-R(h,0)-R(0,h)+R(0,0)]}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}=\infty.$$

可知 $X(t)$不均方可微.

例 5 设$\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程,$X(t)=\sin At$,其中 A 是随机变量,且 $E[A^4]<\infty$. 证明:$X'(t)=A\cos A(t)$.

证 因为

$$E\left[\left|\frac{\sin A(t+h)-\sin A}{h}-A\cos t\right|^2\right]$$

$$= E\left[\left|\frac{\sin At(\cos Ah - 1) + \cos At(\sin Ah - Ah)}{h}\right|^2\right]$$

$$\leqslant 2E\left[\frac{\sin^2 At(\cos Ah - 1)^2}{h^2}\right] + 2E\left[\frac{\cos^2 At(\sin Ah - Ah)^2}{h^2}\right]$$

$$\leqslant 4h^2 E[A^4] \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

所以 $X(t)$ 均方可微，且 $X'(t) = A\cos At$.

最后一个不等式的证明用到了 $\cos\alpha \leqslant 1 + \alpha^2$，$\sin\alpha \leqslant \alpha + \alpha^2$.

例 6 设平稳过程 $X(t)$ 是均方可微的，其导数是 $X'(t)$. 证明：$\forall t$，随机变量 $X(t)$ 和 $X'(t)$ 是正交的，也是不相关的，即

$$E[X(t)X'(t)] = E[X(t)]E[X'(t)] = 0.$$

证 依相关函数定义，应有

$$E[X(t)X'(t)] = E\left[X(t)\lim_{\Delta t \to 0}\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} E[X(t)]\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}[R_X(\Delta t) - R_X(0)] = R'(0),$$

由相关函数的性质，有 $|R(0)| \geqslant |R(\tau)|$，且 $R(\tau)$ 为偶函数，因此 $\tau = 0$ 为 $R(\tau)$ 的极值点，有 $R'(0) = 0$. 由此得出

$$E[X(t)X'(t)] = 0.$$

若进一步令 $E[X(t)] = m(t)$，则 $E[X'(t)] = m'(t)$. 由于 $X(t)$ 为平稳过程，$m(t)$ 是常数，故

$$m'(t) = 0, \quad E[X(t)]E[X'(t)] = 0.$$

从而 $$E[X(t)X'(t)] = E[X(t)]E[X'(t)] = 0.$$

例 7 已知 $R_X(\tau) = e^{-\tau^2}$，如果 $Y(t) = X(t) + \dot{X}(t)$，求 $R_Y(\tau)$.

解 依相关函数的定义，应有

$$R_Y(\tau) = E[Y(t)Y(t-\tau)]$$

$$= E\{[X(t) + \dot{X}(t)][X(t-\tau) + \dot{X}(t-\tau)]\}$$

$$= E\{X(t)X(t-\tau) + \dot{X}(t)\dot{X}(t-\tau)$$

$$+\dot{X}(t)X(t-\tau)+X(t)\dot{X}(t-\tau)\}$$
$$=R_X(\tau)-R_X''(\tau)+R_X'(\tau)-R_X'(\tau)$$
$$=R_X(\tau)-R_X''(\tau)=(3-4\tau^2)e^{-\tau^2}.$$

例 8 证明:维纳过程$\{W(t),t\geqslant 0\}$是非均方可导的.

证法 1 $\forall t_0\in[0,\infty)$,若维纳过程 $W(t)$在 t_0 处均方可导,则存在随机变量 Y,使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{W(t_0+h)-W(t_0)}{h}=Y,$$

则 Y 平方可积,从而$|Y|<\infty$. 且有数列$\{h_n\}$,$0\leqslant h_n\to 0$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W(t_0+h_n)-W(t_0)}{h_n}=Y,$$

所以 $$P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{W(t_0+h_n)-W(t_0)}{\sqrt{h_n}}=0\right\}=1. \qquad ①$$

故$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\geqslant 1$,当 $n\geqslant N$ 时,有

$$P\left\{\left|\frac{X(t_0+h_n)-X(t_0)}{\sqrt{h_n}}\right|<\varepsilon\right\}>\frac{1}{2}. \qquad ②$$

从另一方面知,因为 $W(t_0+h_n)-W(t_0)\sim N(0,\sigma^2h_n)$,故

$$\frac{W(t_0+h_n)-W(t_0)}{\sqrt{h_n}}\sim N(0,\sigma^2).$$

由正态分布的性质,当 ε 充分小时,式②左边的概率

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{|X|<\varepsilon}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx<\frac{1}{2}.$$

这与 h_n 无关,从而推出矛盾. 所以,维纳过程非均方可导.

证法 2 设$\{W(t),t\in[0,\infty)\}$是参数为 σ^2 的维纳过程,若$\{W(t)\}$均方可导,则存在二阶矩过程$\{Y(t)\}$,使得

$$\lim_{h\to 0}E\left\{\left[\frac{W(t+h)-W(t)}{h}-Y(t)\right]^2\right\}=0,$$

于是 $$\lim_{h\to 0}E\left\{\left[\frac{W(t\mp h)-W(t)}{h}\right]^2\right\}=E\{[Y(t)]^2\}<\infty.$$

但是 $$\lim_{h\to\infty}E\left\{\left[\frac{W(t\mp h)-W(t)}{h}\right]^2\right\}=\lim_{h\to\infty}\frac{\sigma^2}{h}=\infty,$$

所以,维纳过程$\{W(t)\}$不均方可导.

例 9 设$\{X(t),t\in[0,\infty)\}$是宽平稳过程,$R_X(u)$是其相关函数,且$m(t)=E[X(t)]\equiv m_0$.若$\{X(t)\}$均方可导,证明:$R_X(u)$二阶可导,且$\{X'(t)\}$的期望值恒为零,$\{X'(t)\}$的相关函数为$-R_X''(u)$.

证 因为

$$\begin{aligned}&R_X(u-h)-R_X(u)\\&=\mathrm{Cov}(X(s+h),X(s+u))-\mathrm{Cov}(X(s),X(s+u))\\&=E\{[X(s+u)-m_0][X(s+h)-X(s)]\},\end{aligned}$$

由 $$\lim_{m,n\to\infty}E[X(n)Y(m)]=E[XY],$$

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{R_X(u-h)-R_X(u)}{h}\\&=\lim_{h\to0}E\left\{\frac{[X(s+u)-m_0][X(s+h)-X(s)]}{h}\right\}\\&=E\{[X(s+u)-m_0]X'(s)\}\\&\Rightarrow -R_X'(u)=E\{[X(s+u)-m_0]X'(s)\}.\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{-R_X'(u+h)+R_X'(u)}{h}\\&=\lim_{h\to0}E\left\{\frac{[(X(s+u+h)-m_0)-(X(s+h)-m_0)]X'(s)}{h}\right\}\\&=E[X'(s+u)X'(s)]\Rightarrow -R_X''(u)=E[X'(s+u)X'(s)].\end{aligned}$$

若能证明$E[X'(t)]\equiv0$,则知$\{X'(t)\}$的相关函数即为$-R_X''(u)$.注意到$E[X(t)]\equiv m_0$,所以

$$\begin{aligned}|E[X'(t)]|&=\left|E\left[\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-X'(t)\right]\right|\\&\leqslant E\left[\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-X'(t)\right|\right]\xrightarrow{h\to0}0,\end{aligned}$$

从而证得$E[X'(t)]=0$,即有$\{X'(t)\}$的相关函数是$-R_X''(u)$.

第三节 均方积分

主要内容

一、均方积分

1. 设$\{X(t),t\in[a,b]\}$是二阶矩过程，$f(t)$是定义在$[a,b]$上的任意确定函数，将区间$[a,b]$分割成n个子区间，分点为$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，设$\Delta_n=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}(t_{i+1}-t_i)$，$t_i\leqslant t_i'\leqslant t_{i+1}$，$i=0,1,2,\cdots,n-1$，作和式$Y_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(t_i')X(t_i')(t_{i+1}-t_i)$，如果均方极限

$$Y=\underset{\substack{n\to\infty\\ \Delta_n\to 0}}{\text{l. i. m}}\sum_{i=0}^{n-1}f(t_i')X(t_i')(t_{i+1}-t_i)=\underset{\Delta_n\to 0}{\text{l. i. m}}\,Y_n$$

存在，且与子区间的分法与t_i'的取法无关，则称此极限是$f(t)X(t)$在$[a,b]$上的**均方黎曼积分**，简称均方积分，记为

$$\underset{\substack{n\to\infty\\ \Delta_n\to 0}}{\text{l. i. m}}\sum_{i=0}^{n-1}f(t_i')X(t_i')(t_{i+1}-t_i)=\int_a^b f(t)X(t)\mathrm{d}t.$$

2. **均方可积准则** $f(t)X(t)$在$[a,b]$上均方可积的充分条件是二重积分$\int_a^b\int_a^b f(s)\,\overline{f(t)}C_X(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$存在，其中$C_X(s,t)$亦可写为$R_X(s,t)$.

3. 设$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$是二阶矩过程，$f(t),t\in(-\infty,\infty)$是确定的函数，如果$\underset{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}{\text{l. i. m}}\int_a^b f(t)X(t)\mathrm{d}t$存在，则称此极限为$f(t)X(t)$在无限区间$(-\infty,\infty)$上的**均方积分**，记为$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)X(t)\mathrm{d}t$.

此时，均方可积的充分条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\overline{f(t)}C_X(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t < \infty$$

存在,其中 $C_X(s,t)$亦可写为 $R_X(s,t)$.

4. $f(t,u)X(t)$在$[a,b]$上均方可积的充分条件是二重积分 $\int_a^b\int_a^b f(s,u)\,\overline{f(t,u)}C_X(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$ 存在.

广义均方积分 $\int_a^{\infty} f(t,u)X(t)\mathrm{d}t$ 存在的充分条件是二重积分

$$\int_a^{\infty}\int_a^{\infty} f(s,u)\,\overline{f(t,u)}C_X(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

存在,其中 $C_X(s,t)$亦可写为 $R_X(s,t)$.

5. 均方积分有以下性质:

(1) 若 $X(t)$在$[a,b]$上均方连续,则 $X(t)$在$[a,b]$上均方可积.

(2) $$E\left[\int_a^b f(t)X(t)\mathrm{d}t\right] = \int_a^b f(t)E[X(t)]\mathrm{d}t,$$

特别有 $$E\left[\int_a^b X(t)\mathrm{d}t\right] = \int_a^b E[X(t)]\mathrm{d}t.$$

(3) $\int_a^b f(t)X(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)X(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)X(t)\mathrm{d}t,\ a<c<b.$

(4) 若 $X(t)$在$[a,b]$上均方连续,则

$$E\left\{\left[\int_a^b X(t)\mathrm{d}t\right]^2\right\} \leqslant M(b-a)^2,$$

式中 $$M = \max_{a\leqslant t\leqslant b} E[X^2(t)].$$

(5)若 $X(t)$在$[a,b]$上均方连续,则

$$Y(t) = \int_0^t X(s)\mathrm{d}s,\quad a\leqslant t\leqslant b$$

在$[a,b]$上均方可积,且 $Y'(t)=X(t)$.

(6) 若 $X(t)$在$[a,b]$上均方可微,且 $X'(t)$在$[a,b]$上均方连续,则

$$\int_a^b X'(t)\mathrm{d}t = X(b) - X(a)\quad \text{(N-L 公式)}.$$

(7) 若 $X(t)$在$[a,b]$上均方可微，且 $X'(t)$在$[a,b]$上均方连续，$f(t)$是$[a,b]$上的连续可微函数，则有

$$\int_a^b f(t)X'(t)\mathrm{d}t = [f(t)X(t)]\Big|_a^b - \int_a^b f'(t)X(t)\mathrm{d}t.$$

(8)
$$E\left[\int_a^b f(s)X(s)\mathrm{d}s \overline{\int_a^b f(t)X(t)\mathrm{d}t}\right]$$
$$= \int_a^b\int_a^b f(s)f(t)C_X(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

特别有
$$E\left[\left|\int_a^b X(t)\mathrm{d}t\right|^2\right] = \int_a^b\int_a^b C_X(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

其中 $C_X(s,t)$亦可写为 $R_X(s,t)$.

(9) 若 $X(t)$均方连续，则

$$E\left[\int_a^t X(u)\mathrm{d}u \overline{\int_a^t X(v)\mathrm{d}v}\right]$$
$$= E\left[\left|\int_a^t X(u)\mathrm{d}u\right|^2\right] \leqslant (t-a)\int_a^t E[X(u)\overline{X(u)}]\mathrm{d}u$$
$$\leqslant (b-a)\int_a^t E[X(u)\overline{X(u)}]\mathrm{d}u,$$

特别有 $\left\{E\left[\left|\int_a^b X(u)\mathrm{d}u\right|^2\right]\right\}^{1/2} \leqslant \int_a^b \{E[|X(u)|^2]\}^{1/2}\mathrm{d}u.$

6. 若 $X(t)$，$Y(t)$在$[a,b]$上均方可积，α,β为常数，则有

$$\int_a^b [aX(t)+bY(t)]\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b X(t)\mathrm{d}t + \beta\int_a^b Y(t)\mathrm{d}t.$$

7. 若二重积分 $\int_a^b\int_a^b f(s,u)\overline{f(t,u)}C_X(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$ 存在，则均方积分过程 $\int_a^b f(t,u)X(t)\mathrm{d}t$ 的均值函数是

$$E\left[\int_a^b f(t,u)X(t)\mathrm{d}t\right] = \int_a^b f(t,u)E[X(t)]\mathrm{d}t,$$

协方差函数是

$$C(u,v) = \int_a^b\int_a^b f(s,u)\overline{f(t,u)}C_X(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

其中 $C_X(s,t)$亦可写为 $R_X(s,t)$.

8. 设$\{X(t),t\in[a,b]\}$是二阶矩过程，$f(t)$是$[a,b]$上的普通函数，将$[a,b]$分割

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b,\quad \Delta_n=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{t_k-t_{k-1}\}$$

作和式 $Z_n=\sum_{k=1}^{n}f(u_k)[X(t_k)-X(t_{k-1})]$，其中 $u_k\in[t_{k-1},t_k]$，$k=1,2,\cdots,n$. 若 $\Delta_n\to 0$ 时，Z_n 的均方极限 $Z=\mathrm{l.i.m}\ Z_n$ 存在，则称 Z 为 $f(t)$关于 $X(t)$在$[a,b]$上的**均方斯替尔吉斯积分**，记为

$$Z=\int_a^b f(t)\mathrm{d}X(t).$$

9. 设$\{X(t),t\in[a,b]\}$是二阶矩过程，协方差函数 $C_X(s,t)$，又 $f(t)$ 是$[a,b]$上的普通函数. 若二重斯替尔吉斯积分 $\int_a^b\int_a^b f(s)f(t)\mathrm{d}C_X(s,t)$ 存在，则 $f(t)$关于 $X(t)$在$[a,b]$上的均方斯替尔吉斯积分 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}X(t)$ 存在.

若 $f(t)$对 $X(t)$在$[a,b]$上均方斯替尔吉斯可积，则有

(1) $E\left[\int_a^b f(t)\mathrm{d}X(t)\right]=\int_a^b f(t)\mathrm{d}E[X(t)]=\int_a^b f(t)\mathrm{d}m_X(t)$,

(2) $E\left[\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}X(t)\right|^2\right]=\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}\mathrm{d}C_X(s,t)$.

本段中 $C_X(s,t)$均可写为 $R_X(s,t)$.

有限区间上的斯替尔吉斯积分也可推广到无限区间情况.

二、伊藤积分

1. 参数为 σ^2 的维纳过程$\{W(t),t\in(-\infty,\infty)\}$，其均值为零，$R_W(s,t)=\sigma^2\min\{s,t\}$，$D[W(t)-W(s)]=\sigma^2|t-s|$. 其(形式上)广义导数过程$\{W'(t),t\in(-\infty,\infty)\}$称为参数为 σ^2 的白噪声，其相关函数为

$$R_{W'}(s,t)=\sigma^2\delta(s-t).$$

2. 设 $X(t)$是二阶矩过程，$W(t)$为维纳过程，在$[a,b]$上进行

分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, $\Delta_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k-t_{k-1})$,

作和式 $$I_n=\sum_{k=1}^{n}X(t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})].$$

如果均方极限$\lim\limits_{\Delta_n\to 0}I_n$ 存在,则称其极限为 $X(t)$关于 $W(t)$的**伊藤(Ito)积分**,记为

$$\mathop{\mathrm{l.i.m}}_{n\to\infty,\Delta_n\to 0} I_n=\int_a^b X(t)\mathrm{d}W(t).$$

3. 设 $X(t)$为均方连续的二阶矩过程,且对任意的 $s_1',s_2'\leqslant t_{k-1}<t_k$ 及 $s_1,s_2\leqslant t_{k-1}$,$[X(s_1'),X(s_2'),W(s_2)-W(s_1)]$与 $W(t_k)-W(t_{k-1})$相互独立,则 $X(t)$关于 $W(t)$的伊藤积分存在且唯一.

4. 设伊藤积分$\int_a^b X(t)\mathrm{d}W(t)$,$\int_a^b Y(t)\mathrm{d}W(t)$ 存在.

(1) 对任意常数 α 和 β,有

$$\int_a^b[\alpha X(t)+\beta Y(t)]\mathrm{d}W(t)=\alpha\int_a^b X(t)\mathrm{d}W(t)+\beta\int_a^b Y(t)\mathrm{d}W(t).$$

(2) 如有 $a\leqslant c\leqslant b$,则有

$$\int_a^b X(t)\mathrm{d}W(t)=\int_a^c X(t)\mathrm{d}W(t)+\int_c^b X(t)\mathrm{d}W(t).$$

(3) 若$\int_a^b X(t)\mathrm{d}W(t)$ 存在,则对于 $a\leqslant t\leqslant b$,有

$$Y(t)=\int_a^t X(s)\mathrm{d}W(s),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

存在且关于 t 均方连续.

(4) 设$\{X_n(t),t\in[a,b]\}$是均方连续的二阶矩过程,且满足伊藤积分存在条件. 若关于 $t\in T$ 一致地有$\mathop{\mathrm{l.i.m}}\limits_{n\to\infty}X_n(t)=X(t)$,则 $X(t)$也均方连续且满足伊藤积分存在条件,对一切 $a\leqslant t\leqslant b$ 一致地有

$$\mathop{\mathrm{l.i.m}}_{n\to\infty}\int_a^t X_n(u)\mathrm{d}W(u)=\int_a^b X(u)\mathrm{d}W(u).$$

疑难解析

1. 为什么二重积分 $\int_a^b\int_a^b f(s,u)f(t,u)C_X(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$ 存在是 $f(t,u)X(t)$在$[a,b]$均方可积的充分条件?

答　如果二重积分存在,积分和式

$$\lim_{\substack{n,m\to\infty\\ \Delta_1,\Delta_2\to 0}}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}f(s_i{}',u)\overline{f(t_k{}',u)}C_X(s_i{}',s_k{}')(s_{i+1}-s_i)(t_{k+1}-t_k)$$

极限存在,即

$$\lim_{\substack{n,m\to\infty\\ \Delta_1,\Delta_2\to 0}}E\{\sum_{i=0}^{n-1}f(s_i{}',u)X(s_i{}')(s_{i+1}-s_i)\sum_{k=0}^{m-1}\overline{f(t_k{}',u)X(t_k{}')(t_{k+1}-t_k)}\}$$

存在,所以充分性成立. 但是第一个积分和式极限存在,并不能保证二重积分存在. 这是因为,此极限是在对区域作矩形的分法下存在,是否与分法无关,在任意分法下是否都有极限,我们都不知道.

$f(t)X(t)$在$[a,b]$上均方可积的充分条件也出于同样的原因.

2. 怎样理解伊藤随机积分?

答　在伊藤积分 $I=\int_a^b X(t)\mathrm{d}W(t)$ 中,$X(t)$是二阶矩过程,$W(t)$是维纳过程,其形式广义导数$W'(t)$的相关函数为

$$R_{W'}(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_W(s,t)=\sigma^2\delta(s-t).$$

其中 δ 函数是一个广义函数,当 $s=t$ 时,$R_{W'}(s,t)=\infty$,反映$W'(t)$取值的分散性.

在其积分的构造定义中,$X(t_k{}')$取值只能取小区间的左端点,否则得到其它的积分.

伊藤随机积分某些性质(如线性性、区间可加性)与普通定积分相同,但大部分性质与普通定积分不同.

若将伊藤积分中的 $X(t)$改换成$[a,b]$上的连续函数 $f(t)$时,

称$\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t)$为$f(t)$关于$W(t)$在$[a,b]$上的随机积分，是$f(t)W'(t)$在$[a,b]$上的均方积分. 所以，也可以认为伊藤积分是$X(t)W'(t)$在$[a,b]$上的特殊的均方积分.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设$\{X(t),t\in T\}$是一个维纳过程，讨论均方积分$Y(u)=\int_0^u X(t)\mathrm{d}t$的存在性.

解 这里可认为$f(t)\equiv 1$. 又知维纳过程的协方差函数$C_X(s,t)=\sigma^2\min\{s,t\}$，根据均方可积准则讨论二重积分

$$\int_0^u\int_0^u \sigma^2\min\{s,t\}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\sigma^2\int_0^u\left[\int_0^s t\mathrm{d}t+\int_s^u s\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s=\frac{\sigma^2}{3}u^3,$$

故知，对一切u(有限)，维纳过程在$[0,u]$上均方可积，即$Y(u)=\int_0^u X(t)\mathrm{d}t$存在.

例 2 求维纳过程的积分过程的均值函数、协方差函数和方差函数.

解 如图 5.1 所示，维纳过程的积分过程即$Y(u)=\int_0^u X(t)\mathrm{d}t$，故均值函数

$$E[Y(u)]=\int_0^u E[X(t)]\mathrm{d}t=0.$$

设$0\leqslant v\leqslant u$，则协方差函数

$$\begin{aligned}C_Y(u,v)&=\int_0^u\int_0^v \sigma^2\min\{s,t\}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&=\iint_{D_1}\sigma^2\min\{s,t\}\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\iint_{D_2}\sigma^2 s\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{3}\sigma^2v^3+\int_0^v\sigma^2 s\mathrm{d}s\int_v^u\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\sigma^2v^2(3u-v).\end{aligned}$$

图 5.1

若 $0\leqslant u\leqslant v$，同样可得

$$C_Y(u,v)=\frac{1}{6}\sigma^2u^2(3v-u),$$

从而得
$$D[Y(u)]=C_Y(u,u)=\frac{1}{3}\sigma^2u^3.$$

例 3 设 $\{X(t),t\in[a,b]\}$ 是一正态过程，若 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方可积，证明：$\int_a^b X(t)\mathrm{d}t$ 是正态随机变量.

证 因为
$$\int_a^b X(t)\mathrm{d}t=\underset{\Delta_n\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\sum_{k=0}^{n-1}X(u_k)(t_{k+1}-t_k),$$

而
$$\sum_{k=0}^{n-1}X(u_k)(t_{k+1}-t_k)=(X(u_1)X(u_2)\cdots X(u_n))\begin{pmatrix}t_1-t_0\\ t_2-t_1\\ \vdots\\ t_n-t_{n-1}\end{pmatrix}$$

是正态向量的线性变换，所以

$$\sum_{k=0}^{n-1}X(u_k)(t_{k+1}-t_k)$$

是正态随机变量，故 $\int_a^b X(t)\mathrm{d}t$ 是正态随机变量.

例 4 设 $\{X(t),t\in[a,b]\}$ 是一正态过程，若 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方可积，令 $Y(t)=\int_a^t X(s)\mathrm{d}s$，证明：$\{Y(t),t\in[a,b]\}$ 是正态随机过程.

证 在区间 $[a,b]$ 上任取 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，对于 t_k 在 $[a,t_k]$ 上作分割，有

$$a=s_0^{(k)}<s_1^{(k)}<\cdots<s_{n_k}^{(k)}=t_k,\quad \Delta_{n_k}=\max_{0\leqslant l\leqslant n_k-1}\{s_{l+1}^{(k)}-s_l^{(k)}\},$$

则 $\sum_{l=0}^{n_k-1}X(u_l^{(k)})(s_{l+1}^{(k)}-s_l)$ 是一正态随机变量. 其中

$$u_l^{(k)}\in[s_{l+1}^{(k)},s_l^{(k)}],$$

且 $Y(t_k)=\underset{\Delta_{n_k}\to 0}{\text{l.i.m}}\sum_{l=0}^{n_k-1}X(u_l^{(k)})(s_{l+1}^{(k)}-s_l^{(k)}),\quad k=1,2,\cdots,n.$

由第一节例 6 知，$\{Y(t_1),Y(t_2),\cdots,Y(t_n)\}$是 n 维正态随机变量，故$\{Y(t),t\in[a,b]\}$是正态随机过程

$Y(t)$的均值函数

$$m_Y(t)=E[Y(t)]=\int_a^t E[Y(s)]\mathrm{d}s=\int_a^t m_X(s)\mathrm{d}s.$$

$$\begin{aligned}B_X(s,t)&=E\{[Y(s)-m_Y(s)][Y(t)-m_Y(t)]\}\\&=E\left\{\int_a^s[X(u)-m_X(u)]\mathrm{d}u\int_a^t[X(v)-m_X(v)]\mathrm{d}v\right\}\\&=\int_a^s\int_a^t C_X(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

例 5 设$\{X(t),t\geqslant 0\}$是强度为 λ 的泊松过程，令 $M(T)=\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\mathrm{d}t$，求 $E[M(T)]$和 $D[M(T)]$.

解 因为

$$\begin{aligned}B_X(s,t)&=E[X(s)X(t)]=C_X(s,t)-\lambda^2st+\lambda^2st+\lambda^2st\\&=\lambda\min\{s,t\}+\lambda^2st,\end{aligned}$$

所以 $E[X^2(t)]=B_X(t,t)<\infty$，且 $B_X(s,t)$在$[0,T]\times[0,T]$上黎曼可积，并有

$$E[M(T)]=\frac{1}{T}\int_0^T E[X(t)]\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\lambda t\,\mathrm{d}t=\frac{\lambda T}{2},$$

$$\begin{aligned}T^2D[M(T)]&=\int_0^T\int_0^T C_X(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_0^T\int_0^T\lambda\min\{s,t\}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\\&=\lambda\left[\int_0^T\left(\int_0^t s\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t+\int_0^T\left(\int_t^T t\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{3}\lambda T^3,\end{aligned}$$

故
$$D[M(T)]=\frac{1}{3}\lambda T.$$

例 6 若$\{X(t),t\geqslant 0\}$是维纳过程的积分过程，求 $E[M(T)]$和 $D[M(T)]$.

解 因为 $\qquad E[X(t)]=0,$

$$\mathrm{Cov}(X(s),X(t)) = \begin{cases} \frac{1}{6}\sigma^2 s^2(3t-s), & t>s, \\ \frac{1}{6}\sigma^2 t^2(3s-t), & s>t, \end{cases}$$

所以 $$E[M(T)] = \frac{1}{T}\int_0^T E[X(t)]\mathrm{d}t = 0,$$

$$\begin{aligned} T^2 D[M(T)] &= \int_0^T\int_0^T \mathrm{Cov}(X(s)X(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T\left[\int_0^t \frac{1}{6}\sigma^2 s^2(3t-s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^T\left[\int_t^T \frac{1}{6}\sigma^2 t^2(3s-t)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \\ &= \sigma^2\left[\frac{T^5}{30} - \frac{T^5}{120} + \frac{T^5}{12} - \frac{T^5}{20} - \frac{T^5}{24} + \frac{T^5}{30}\right] \\ &= \frac{1}{20}\sigma^2 T^5, \end{aligned}$$

即 $$D[M(T)]=\frac{1}{20}\sigma^2 T^3.$$

例 7 设 $X(t)=2A^2t$，其中 A 是随机过程，$E[A^4]<\infty$，求 $\int_0^t X(t)\mathrm{d}t$.

解 因为

$$R_X(s,t) = E[X(s)X(t)] = E[4A^4 st] = 4stE[A^4]$$

连续，所以 $\int_0^t X(t)\mathrm{d}t$ 存在. 若在定义中取 $u_k=\frac{1}{2}(t_{k+1}+t_k)$，则

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} X(u_k)(t_{k+1}-t_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} 2A^2\,\frac{1}{2}(t_{k+1}+t_k)(t_{k+1}-t_k) \\ &= A^2(t^2-0) \to A^2t^2, \end{aligned}$$

故 $$\int_0^t X(t)\mathrm{d}t = \int_0^t 2A^2t\mathrm{d}t = A^2t^2.$$

例 8 证明：设二阶矩过程 $\{X(t),t\in[a,b]\}$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $X'(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方连续，则对任意 $t\in[a,b]$，有

$$\int_a^t X'(s)\mathrm{d}s = X(t) - X(a).$$

证 设 $Y(t) = \int_a^t X'(s)\mathrm{d}s$，则 $Y'(t)=X(t)$，有

$$X'(t) = [X(t)+c]',$$

于是 $$Y(t) = X(t)+c = \int_a^t X'(s)\mathrm{d}s.$$

令 $t=a$，得 $$X(a)+c = \int_a^a X'(s)\mathrm{d}s = 0,$$

故 $$c=-X(a).$$

从而 $$X(t)-X(a) = \int_a^t X'(s)\mathrm{d}s.$$

特别地，令 $t=b$，即得 N-L 公式

$$\int_a^b X'(t)\mathrm{d}t = X(b) - X(a).$$

例 9 设 $W(t)$ 是参数 $\sigma^2=1$ 的维纳过程，求 $\int_a^b W(t)\mathrm{d}W(t)$.

解 因为 $W(t)$ 满足定理条件，存在唯一的 $\int_a^b W(t)\mathrm{d}W(t)$. 对 $[a,b]$ 作分割

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b,\quad \Delta_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k-t_{k-1}),$$

则和式

$$\begin{aligned}
I_n &= \sum_{k=1}^n W(t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})] \\
&= -\sum_{k=1}^n W(t_{k-1})[W(t_{k-1})-W(t_k)] \\
&= -[W^2(t_0)-W(t_0)W(t_1)+W^2(t_1)-W(t_1)W(t_2)+\cdots \\
&\quad +W^2(t_{n-1})-W(t_{n-1})W(t_n)] \\
&= -\Big\{\frac{1}{2}W^2(t_0)+\frac{1}{2}[W(t_0)-W(t_1)]^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}[W(t_1)-W(t_2)]^2+\cdots+\frac{1}{2}[W(t_{n-1})-W(t_n)]^2
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}W^2(t_n)\Big\}$$

$$=\frac{1}{2}[W^2(b)-W^2(a)]-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[W(t_k)-W(t_{k-1})]^2.$$

因此 $\int_a^b W(t)\mathrm{d}W(t)$

$$=\frac{1}{2}[W^2(b)-W^2(a)]-\frac{1}{2}\lim_{\Delta_n\to 0}\sum_{n=1}^{k}[W(t_k)-W(t_{k-1})]^2.$$

再来计算上式中的均方极限. 令 $\Delta W_k=W(t_k)-W(t_{k-1})$, $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$, 则在假设极限为 $b-a$ 条件下, 有

$$E\Big\{\Big[\sum_{k=1}^{n}(\Delta W_k)^2-(b-a)\Big]^2\Big\}$$

$$=E\Big\{\sum_{k=1}^{n}[(\Delta W_k)^2-\Delta t_k]\Big\}^2$$

$$=E\Big\{\sum_{k=1}^{n}[\Delta W_k^2-\Delta t_k]^2+2\sum_{\substack{k\neq i\\k,i=1}}^{n}[(\Delta W_k^2-\Delta t_k)(\Delta W_i^2-\Delta t_i)]\Big\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E[\Delta W_k^2-\Delta t_k]^2+2\sum_{\substack{k\neq i\\k,i=1}}^{n}[E(\Delta W_k^2-\Delta t_k)E(\Delta W_i^2-\Delta t_i)]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E\{[\Delta W_k^2-\Delta t_k]^2\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E[\Delta W_k^4-2(\Delta W_k)^2\Delta t_k+(\Delta t_k)^2]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[3(\Delta t_k)^2-2(\Delta t_k)\Delta t_k+(\Delta t_k)^2]$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}(\Delta t_k)^2\leqslant 2\Delta_n\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k=2\Delta_n(b-a)\xrightarrow{\Delta_n\to 0}0.$$

所以 $$\mathrm{l.i.m}\sum_{k=1}^{n}[W(t_k)-W(t_{k-1})]^2=b-a.$$

综合上述分析, 得

$$\int_a^b W(t)\mathrm{d}W(t) = \frac{1}{2}[W^2(b) - W^2(a)] - \frac{1}{2}(b-a).$$

由此可知，伊藤积分与黎曼积分不同. 对于黎曼积分，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}f(x) = \frac{1}{2}[f^2(b) - f^2(a)].$$

同时，若函数取区间右端点的值，则和式

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} W(t_k)[W(t_k) - W(t_{k-1})].$$

由
$$J_n - I_n = \sum_{k=1}^{n}[W(t_k) - W(t_{k-1})]^2$$

知
$$\underset{\Delta_n \to 0}{\mathrm{l.i.m}}(J_n - I_n) = b - a,$$

即知有两个不同的均方极限. 所以，伊藤积分中函数只能在小区间左端点取值.

例 10 设$\{W(t), t\in(-\infty,\infty)\}$是参数为$\sigma^2$的维纳过程，令$X(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{a(t-u)}\mathrm{d}W(u), t \geqslant 0$，式中$\alpha$是不等于零的实数. 求$X(t)$的均值函数$m_X(t)$和相关函数$R_X(s,t)$.

解 因为$W(t)$是维纳过程，所以

$$m_X(t) = 0,$$

$$\begin{aligned} R_X(s,t) &= E[X(s)X(t)] \\ &= E\left[\int_0^s \mathrm{e}^{a(s-u)}\mathrm{d}W(u)\int_0^t \mathrm{e}^{a(t-v)}\mathrm{d}W(v)\right] \\ &= \sigma^2\int_0^s \mathrm{e}^{a(s-u)}\mathrm{e}^{a(t-u)}\mathrm{d}u, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \\ &= \frac{\sigma^2}{2a}[\mathrm{e}^{a(s+t)} - \mathrm{e}^{a(t-s)}], \end{aligned}$$

特别地，有
$$D[X(t)] = \frac{\sigma^2}{2a}(\mathrm{e}^{2at} - 1).$$

例 11 设$\{W(t), t\in(-\infty,\infty)\}$是参数为$\sigma^2$的维纳过程，令

$$X(t) = \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{a(t-u)}\mathrm{d}W(u), \quad -\infty < t < \infty,$$

其中 $a<0$，求 $X(t)$ 的均值函数 $m_X(t)$ 和相关函数 $R_X(s,t)$.

解 因为 $\int_{-\infty}^{t} e^{-2a(t-u)}du=-\frac{1}{2a}<\infty$，所以，$\{X(t)\}$ 是二阶矩过程，$m_X(t)=0$.

相关函数

$$\begin{aligned}R_X(s,t)&=E[X(s)X(t)]\\&=E\left[\int_{-\infty}^{s} e^{a(s-u)}dW(u)\int_{-\infty}^{t} e^{a(t-v)}dW(u)\right]\\&=\sigma^2\int_{-\infty}^{s} e^{a(s-u)}e^{a(t-u)}du,\ s\leqslant t\\&=-\frac{1}{2a}\sigma^2 e^{a(t-s)}.\end{aligned}$$

由此可知，$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$ 是一个平稳过程.

第四节　随机微分方程简介

主要内容

1. 考虑如下微分方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{dX_i(t)}{dt}=f_i(t,X_1(t),\cdots,X_n(t)),\\ X_i(t_0)=X_{i0},\quad i=1,2,\cdots,n,\end{cases}\qquad ①$$

其中 X_{i0}，$X_i(t)$ 都属于 H（二阶矩变量的全体，是一个线性空间），所有的运算都是均方意义下的，若采用向量记号，可以写为

$$\frac{d\boldsymbol{X}(t)}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{X}(t)),\quad \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0,\qquad ②$$

其中 $\boldsymbol{X}(t)=(\boldsymbol{X}_1(t),\boldsymbol{X}_2(t),\cdots,\boldsymbol{X}_n(t))$,

$$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n),\quad \boldsymbol{X}_0=(X_{1,0},X_{2,0},\cdots,X_{n,0}).$$

2. 在方程(2)中，设 $\boldsymbol{f}=T\times H_n\to H_n$ 连续，且 $\boldsymbol{X}_0\in H_n$. 如果

$\boldsymbol{X}(t):T\to H_n$满足：

(1) 在 T 上均方连续， (2) $\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0$，

(3) $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{X}(t))$是 $\boldsymbol{X}(t)$在 T 上的均方导数，则称 $\boldsymbol{X}(t)$是方程组②的一个均方解.

3. $\boldsymbol{X}(t)$是方程组②的一个均方解的充要条件是

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}_0+\int_0^t \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{X}(t))\mathrm{d}t,\quad t\in T.$$

4. 若 $\boldsymbol{f}:T\times H_n\to H_n$ 满足李普希兹条件

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{X})-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{Y})|\leqslant k(t)|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}|_n,$$

其中 $k(t)$满足 $\int_a^b k(t)\mathrm{d}t<\infty$，则对任意 $\boldsymbol{X}_0\in H_n$，方程组②存在唯一的均方解.

5. 设一阶线性微分方程为

$$\begin{cases} X'(t)=a(t)X(t)+Y(t), \\ X(a)=X_0, \end{cases}$$

其中 $a(t)$是普通连续函数，$X(t)$是具有二阶矩的随机变量，$Y(t)$是均方连续的二阶矩随机过程，则微分方程的解为

$$X(t)=X_0\mathrm{e}^{\int_a^t a(s)\mathrm{d}s}+\int_a^t \mathrm{e}^{\int_s^t a(\tau)\mathrm{d}\tau}Y(s)\mathrm{d}s.$$

当 $a(t)=b$ 为常数时，有

$$X(t)=X_0\mathrm{e}^{b(t-a)}+\int_a^t \mathrm{e}^{b(t-s)}Y(s)\mathrm{d}s.$$

其中关于 $Y(s)$的积分皆为均方积分.

6. 伊藤随机微分方程

设$\{W(t),t\in T\}$是布朗运动过程，$\sigma^2=1$，则

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{X}(t))\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{X}(t))\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t), \\ \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0. \end{cases} \qquad ③$$

若记 $\boldsymbol{W}(t)$的广义导数为 $N(t)$，则 $N(t)$为白噪声，则方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}'(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{X}(t))+\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{X}(t))N(t), \\ \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0 \end{cases}$$

可代替微分方程③. 考虑伊藤积分方程

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{X}(s))\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{g}(s,\boldsymbol{X}(s))\mathrm{d}\boldsymbol{W}(s), \qquad ④$$

式④与式③可视为等价的. 式中右边第一个积分是均方积分,第二个积分是伊藤积分.

7. 伊藤方程解的唯一性. 设 $f(t,x),g(t,x),t\in T,x\in\mathbf{R}$ 是满足下列条件的实函数:

(1)是二元连续的,且关于 x 是 t 的一致连续的;

(2)增长条件: $|f(t,x)|^2\leqslant k^2(1+x^2)$,

$|f(t,x)|^2\leqslant k^2(1+x^2)$, $\quad |g(t,x)|^2\leqslant k^2(1+x^2)$;

(3)李普希兹条件: $|f(t,X_1)-f(t,X_2)|\leqslant k|X_2-X_1|$,

$$|g(t,X_1)-g(t,X_2)|\leqslant k|X_2-X_1|;$$

其中 k 是正数. 如 $\mathbf{X}_0$ 与 W_T 独立,则伊藤方程③有唯一解.

在上述条件下,伊藤方程的唯一解是马尔可夫过程.

疑难解析

1. 研究随机微分方程有什么意义,采用什么方法?

答 在许多科学技术领域中存在大量的随机微分方程问题,如随机干扰下的控制问题,通信技术中的滤波问题,生物技术中的数学模型与随机振动问题等. 要解决与研究它们,就必须研究与求解随机微分方程.

一般从定性与定量两个方面来研究随机微分方程. 定性是指研究解的存在性、唯一性、稳定性,定量是指研究求解过程的统计特性与求解方法.

2. 伊藤随机微分方程有什么特点? 为什么它的唯一解是马尔可夫过程?

答 因为伊藤随机微分方程是在随机过程 $\{W(t),t\in T\}$ 是维纳-列维过程(布朗运动)、$\sigma^2=1$ 及伊藤积分和微分的基础上考虑

的，其积分方程形式（等价于微分方程）中含伊藤积分，即

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{X}(s))\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{g}(s,\boldsymbol{X}(s))\mathrm{d}\boldsymbol{W}(s).$$

在满足解存在唯一性的条件下，对 $a\leqslant t_0<s<t\leqslant b$，若 $\boldsymbol{X}(t)$ 已知，则 $\boldsymbol{X}(t)$ 与 $\boldsymbol{X}(u)$，$t_0\leqslant u<s$ 独立. 因为

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}(s)+\int_{s}^{t}\boldsymbol{f}(v,\boldsymbol{X}(v))\mathrm{d}v+\int_{s}^{t}\boldsymbol{g}(v,\boldsymbol{X}(v))\mathrm{d}\boldsymbol{W}(v),$$

即 $\boldsymbol{X}(t)$ 只与 $\boldsymbol{X}(s)$，$\{\boldsymbol{X}(v),s\leqslant v\leqslant t\}$，$\{\Delta\boldsymbol{W}(v),s\leqslant v\leqslant t\}$ 有关. 而 $\{\boldsymbol{X}(v),s\leqslant v\leqslant t\}$ 也只与 $\boldsymbol{X}(s)$ 和 $\{\Delta\boldsymbol{W}(v),s\leqslant v\leqslant t\}$ 有关. 又因

$$\boldsymbol{X}(u)=\boldsymbol{X}_0+\int_{t_0}^{u}\boldsymbol{f}(v,\boldsymbol{X}(v))\mathrm{d}v+\int_{t_0}^{u}\boldsymbol{g}(v,\boldsymbol{X}(v))\mathrm{d}\boldsymbol{W}(v),$$

故知 $\{\boldsymbol{X}(u),t_0\leqslant u\leqslant s\}$ 只与 $\boldsymbol{X}_0$ 与 $\{\Delta\boldsymbol{W}(v),t_0\leqslant v\leqslant s\}$ 有关. 又由定理条件知 $\{\Delta\boldsymbol{W}(v),s\leqslant v\leqslant t\}$ 与 $\boldsymbol{X}_0$，$\{\Delta\boldsymbol{W}(v),t_0\leqslant v\leqslant s\}$ 独立，这说明 $\boldsymbol{X}(s)$ 已知时，$\boldsymbol{X}(t)$，$t>s$ 与 $\{\Delta\boldsymbol{W}(t),t_0\leqslant v\leqslant s\}$ 独立. 所以，伊藤随机微分方程的唯一解是马尔可夫过程.

方法、技巧与典型例题分析

求解随机微分方程必须处理好求均方积分、伊藤积分，特别是微分方程组的情形. 希望读者通过例题领会具体问题的求解方法.

例 1 设有随机起点的自由落体运动方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=gt, & t>0,\\ X(0)=X_0,\end{cases}$$

其中 $X(t)$ 表示时刻 t 的物体位置，X_0 是服从 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变量. 求解微分方程并讨论解的概率特性.

解 对方程两边求均方积分，得

$$\int_0^t X'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t g(s)\mathrm{d}s,$$

解得 $$X(t)=X(0)+\frac{1}{2}gt^2=X_0+\frac{1}{2}gt^2.$$

而 $$E[X(t)] = E[X_0] + \frac{1}{2}E[gt^2] = \frac{1}{2}gt^2.$$

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= E[X(s)X(t)] - E[\mu_X(s)X(t)] - E[X(s)\mu_X(t)] \\ &\quad + \mu_X(s)\mu_X(t) \\ &= E\left[\left(X_0 + \frac{1}{2}gs^2\right)\left(X_0 + \frac{1}{2}gt^2\right)\right] \\ &\quad - \frac{1}{2}gs^2 E\left[X_0 + \frac{1}{2}gt^2\right] - E\left[X_0 + \frac{1}{2}gs^2\right]\frac{1}{2}gt^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}g^2s^2t^2 \\ &= \sigma^2 + \frac{1}{4}g^2s^2t^2 - \frac{1}{4}g^2s^2t^2 - \frac{1}{4}g^2s^2t^2 + \frac{1}{4}g^2s^2t^2 = \sigma^2, \end{aligned}$$

$$D[X(t)] = C_X(t,t) = \sigma^2.$$

因为对任意正整数 $n, t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$, $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)$均是服从正态分布的随机变量,故解过程$\{X(t), t\in T\}$是一正态过程.

例 2 设随机微分方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = Y(t), \quad t \geqslant 0, \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

其中 $Y(t)$是零均值的二阶矩过程,其协方差函数可积,X_0 是二阶矩实随机变量,且 X_0 与 $Y(t)$独立. 求解微分方程并求 $X(t)$的数字特征.

解 对方程两边求均方积分,得

$$\int_0^t X'(s)\mathrm{d}s = \int_0^t Y(s)\mathrm{d}s,$$

即 $$X(t) = X_0 + \int_0^t Y(s)\mathrm{d}s,$$

故 $$E[X(t)] = E[X_0] + \int_0^t E[Y(s)]\mathrm{d}s = E(X_0),$$

$$C_X(s,t) = E\{[X(s) - E(X_0)]\overline{[X(t) - E(X_0)]}\}$$

$$= E\left\{\left[X_0 - E(X_0) + \int_0^s Y(u)\mathrm{d}u\right]\overline{\left[X_0 - E(X_0) + \int_0^t Y(v)\mathrm{d}v\right]}\right\}$$

$$= E\{[X_0 - E(X_0)]^2\} + E\left[\int_0^s\int_0^t Y(u)\,\overline{Y(v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right]$$

$$= D[X_0] + \int_0^s\int_0^t C_Y(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$D[X(t)] = C_X(t,t) = D[X_0] + \int_0^s\int_0^t C_Y(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

例 3 设有兰格文(Langevin)方程

$$\mathrm{d}X(t) = -kX(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{m}\mathrm{d}W(t),$$

求方程的解过程.

解 将方程改写为

$$\Delta X = -kX(t)\Delta t + [W(t+\Delta t) - W(t)]\frac{1}{m} + o(\Delta t),$$

式中 $k=f/m>0$,$W(t)$是维纳-爱因斯坦过程,设 $m=1$. 因为

$$E[W(t+\Delta t)-W(t)]=0,\quad E\{[W(t+\Delta t)-W(t)]^2\}=2D\Delta t,$$

所以对上式两边取条件期望,可得

$$E[\Delta X \mid X(t) = y] = -ky\Delta t + o(\Delta t),$$

$$E[(\Delta X)^2 \mid X(t) = y] = k^2y^2\Delta t^2 + 2D\Delta t + o(\Delta t),$$

故有
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E[\Delta X \mid X(t) = y] = -ky,$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E[(\Delta X)^2 \mid X(t) = y] = 2D.$$

所以,解过程是一个扩散过程,偏移系数 $a(t,y)=-ky$,扩散系数 $b(t,y)=2D$,从而它又是一个奥恩斯坦-沃伦培克过程,有

均值函数 $$m(t)=0,$$

协方差函数 $$\mathrm{Cov}(X(s),X(t))=\frac{D}{k}\mathrm{e}^{-k(s-t)}.$$

若用 $Y(t)$表示质点在时刻 t 的位置($X(t)$表示质点在时刻 t 的速度),则有

$$Y(t)-Y(0)=\int_0^t X(s)\mathrm{d}s,$$

所以知 $Y(t)$是正态过程

$$E[Y(t)-Y(0)]=0,$$

$$E[\mid Y(t)-Y(0)\mid^2]$$
$$=\int_0^t\int_0^t \frac{D}{k}\mathrm{e}^{-k|u-v|}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{D}{k^3}(kt-1+\mathrm{e}^{-kt}).$$

例 4 设随机微分方程为

$$\begin{cases} a_1X'(t)+a_0X(t)=Y(t), & t\geqslant 0,\\ X(0)=0, \end{cases}$$

其中 a_1,a_0 是常数,$Y(t)$是均值为零的均方连续的二阶矩过程.求解的均值函数和协方差函数.

解 可以直接对方程两边求期望,得

$$\begin{cases} a_1\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E[X(t)]+a_0E[X(t)]=E[Y(t)],\\ E[X(0)]=0, \end{cases}$$

解均值函数 $E[X(t)]$的一阶线性微分方程,得

$$E[X(t)]=c\mathrm{e}^{-a_0t/a_1}.$$

代入初始条件 $E[X(0)]=0$,得

$$c=0\Rightarrow E[X(t)]=0.$$

为了求得协方差函数,需先求解过程 $X(t)$与 $Y(t)$的互协方差函数.为此,对微分方程两边同乘以$\overline{Y(t)}$,再求期望,得

$$a_1E[X'(s)\,\overline{Y(t)}]+a_0E[X(s)\,\overline{Y(t)}]=E[Y(s)\,\overline{Y(t)}].$$

对初始条件两边同乘以$\overline{Y(t)}$,再求期望,得

$$E[X(0)\,\overline{Y(t)}]=C_{XY}(0,t)=0.$$

于是,有新的微分方程

$$\begin{cases} a_1\dfrac{\partial}{\partial s}C_{XY}(s,t)+a_0C_{XY}(s,t)=C_{XY}(s,t),\\ C_{XY}(0,t)=0, \end{cases}$$

解此方程即可求出 $C_{XY}(s,t)$.

对微分方程式取共轭后乘以 $X(s)$，求期望，得

$$a_1 E[X'(t)X(s)] + a_0 E[\overline{X(t)}X(s)] = \overline{Y(t)}X(s).$$

对初始条件两边同乘以 $X(s)$，求期望，得方程组

$$\begin{cases} a_1 \dfrac{\partial}{\partial t}C_X(s,t) + a_0 C_X(s,t) = C_{XY}(s,t), \\ C_X(s,0) = 0, \end{cases}$$

将前面解得的 $C_{XY}(s,t)$代入此方程组，即可解得 $C_X(s,t)$.

例 5 RC 积分电路的输出电压 $Y(t)$与输入电压 $X(t)$的关系由方程

$$Y'(t) + aY(t) = aX(t)$$

描述. 其中 $X(t)$的均值 $m_X(t)=0$，相关函数 $R_X(\tau)=\sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$，已知初始条件 $Y(0)=0$. 求输出电压 $Y(t)$及其均值函数 $m_Y(t)$和相关函数 $R_Y(s,t)$.

解 解一阶线性微分方程，得

$$Y(t) = a\int_0^t X(s)e^{-a(t-s)}ds, \quad t \geqslant 0,$$

故
$$m_Y(t) = E[Y(t)] = a\int_0^t E[X(s)]e^{-a(t-s)}ds = 0,$$

$$\begin{aligned} R_Y(s,t) &= a^2 E\left[\int_0^s X(u)e^{-a(s-u)}du\int_0^t X(v)e^{-a(t-v)}dv\right] \\ &= a^2\int_0^s\int_0^t R_X(u-v)e^{-a(s+t)+a(u+v)}dudv \\ &= a^2\int_0^s\int_0^t e^{-\beta(u-v)}e^{-a(s+t)+a(u+v)}dudv \\ &= \frac{a\sigma^2}{a^2-\beta^2}[ae^{-\beta(t-s)} - \beta e^{-a(t-s)} + (a+\beta)e^{-a(s+t)} \\ &\quad - ae^{-(as+\beta t)} - ae^{-(at+\beta s)}], \quad s \leqslant t, \end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned} R_Y(s,t) &= \frac{a\sigma^2}{a^2-\beta^2}[ae^{-\beta|t-s|} - \beta e^{-a|t-s|} + (a+\beta)e^{-a(s+t)} \\ &\quad - ae^{-(as+\beta t)} - ae^{-(at+\beta s)}]. \end{aligned}$$

例 6 解随机微分方程组

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}, \quad t > 0, \\ X_1(0) = X_2(0) = 0, \end{cases}$$

其中$\{Y_1(t), Y_2(t), t \geqslant 0\}$是已知的二阶矩过程.

解 先解矩阵方程，此时 $X(t)$为 2×2 矩阵

$$X_{11}'(t,s) = 2X_{11}(t,s), t > s, \qquad X_{11}(s,s) = 1,$$

$$X_{12}'(t,s) = 2X_{12}(t,s), t > s, \qquad X_{12}(s,s) = 0,$$

$$X_{21}'(t,s) = X_{11}(t,s) + X_{21}(t,s), t > s, \quad X_{21}(s,s) = 0,$$

$$X_{22}'(t,s) = X_{12}(t,s) + X_{22}(t,s), t > s, \quad X_{22}(s,s) = 1,$$

可以解得，当 $t \geqslant s$ 时，有

$$X_{11}(t,s) = \mathrm{e}^{2(t-s)}, \quad X_{12}(t,s) = 0,$$

$$X_{21}(t,s) = \int_s^t \mathrm{e}^{(t-u)} \mathrm{e}^{2(u-s)} \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{2(t-s)} - \mathrm{e}^{(t-s)}, \quad X_{22}(t,s) = \mathrm{e}^{(t-s)}.$$

从而，得微分方程组的解为

$$X_1(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{2(t-s)} Y_1(s) \mathrm{d}s,$$

$$X_2(t) = \int_0^t \{[\mathrm{e}^{2(t-s)} - \mathrm{e}^{(t-s)}] Y_1(s) + \mathrm{e}^{(t-s)} Y_2(s)\} \mathrm{d}s.$$

例 7 随机微分方程为

$$X''(t) + 2X'(t) + 2X(t) = W(t).$$

(1)设$\{X(t), t \geqslant 0\}$是方程在$[0,\infty)$上满足初始条件 $X(0) = 0, X'(0) = 1$ 的解，求 $X(t)$的分布函数. 其中 t 是使 $m_X(t) = E[X(t)] = 0$的最小正值.

(2)设$\{X_0(t), t \in (-\infty, \infty)\}$是方程的平稳过程解，求 $X_0(t)$ 与 $X_0(0)$不相关的最小正值 t.

解 (1)因为 $a_1^2 - 4a_0a_2 = -4 < 0$，所以

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\cos\beta t - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t\right) = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t),$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sin\beta t = e^{-t} \sin t,$$

$$h(t) = \frac{1}{a_0} \varphi_2(t) = e^{-t} \sin t, \ t \geqslant 0,$$

故方程满足初始条件 $X(0)=0, X'(0)=1$ 的解 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 的均值函数是

$$m_X(t) = E[X(t)] = e^{-t} \sin t,$$

方差函数是

$$D_X(t) = \sigma^2 \int_0^t e^{-2s} \sin^2 s \mathrm{d}s$$

$$= \frac{\sigma^2}{8} [1 + e^{-2t} (\cos 2t - \sin 2t - 2)].$$

从而使 $m_X(t)=0$ 的最小正数是 $t=\pi$. $X(t)$ 服从正态分布,所以

$$X(\pi) \sim N\left[0, \frac{\sigma^2}{8} (1 - e^{-2\pi})\right].$$

(2)方程的平稳过程解 $X_0(t)$ 的相关函数是

$$R_{X_0}(t) = \frac{\sigma^2}{2a_1 a_2} \varphi_1(|t|) = \frac{\sigma^2}{8} e^{-|t|} (\cos|t| + \sin|t|),$$

所以,$X_0(t)$ 与 $X_0(0)$ 不相关的最小正值 $t=3\pi/4$.

注意 题(1)中 $\alpha = -\frac{1}{2a_0}$, $\beta = \frac{1}{2a_0} \sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}$.

例 8 设有随机微分方程

$$X''(t) + 3X'(t) + 2X(t) = W'(t),$$

求在 $[0, \infty)$ 上满足初始条件 $X(0)=c_1, X'(0)=c_2$ 的解.

解 因为 $a_1^2 - 4a_0 a_2 = 1 > 0$,所以

$$\varphi_1(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad \varphi_2(t) = e^{-t} - e^{-2t},$$

$$h(t) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geqslant 0,$$

故方程满足初始条件 $X(0)=c_1, X'(0)=c_2$ 的解是

$$X(t) = c_1 (2e^{-t} - e^{-2t}) + c_2 (e^{-t} - e^{-2t})$$

$$+ \int_0^t (e^{-(t-s)} - e^{-2(t-s)}) \mathrm{d}W(s)$$

$$= \left(2c_1 + c_2 - \int_0^t e^s W(s)\,ds\right)e^{-t}$$

$$+ 2\left(\int_0^t e^{2s} W(s)\,ds - c_1 - c_2\right)e^{-2t}.$$

例 9 已知伊藤随机微分方程

$$\begin{cases} dX(t) = -\dfrac{1}{2}X(t)dt + X(t)dW(t), \\ X(0) = 1, \end{cases}$$

求解过程 $X(t)$.

解 取 $f(t,x)=\ln x$,则依扩散过程的导数式有

$$df(t,X(t)) = \left[\frac{1}{X(t)}\left(-\frac{1}{2}\right)X(t) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{X^2(t)}X^2(t)\right]dt$$

$$+ \frac{X(t)}{X(t)}dW(t),$$

所以 $$d(\ln X(t)) = -dt + dW(t).$$

由此得出 $$\ln X(t) = -t + W(t),$$

$$X(t) = \exp\{-t + W(t)\}.$$

错误的做法是:用普通的积分法则将 $W(t)$ 看做普通函数,从而得到错误的结果 $X(t)=\exp\left\{-\dfrac{1}{2}t+W(t)\right\}$.

通过本节的学习,我们应牢牢记住的是随机微分方程的解也是随机过程(所以称之为解过程),而不是一个特解或者通解. 在分析和求解中时时注意,就不会出现错误.

第六章　平稳过程

第一节　平稳过程与协方差函数的性质

主要内容

一、严平稳过程及其数字特征

1. 设随机过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 的一切有限维分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 当点 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 沿时间轴作任意平移时都不改变，即对任意自然数 n，任意 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，任意实数 τ，当 $t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau\in T$ 时，都有

$$
\begin{aligned}
&F(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)\\
&=F(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),
\end{aligned}
$$

则称 $\{X(t),t\in T\}$ 为**严格平稳过程**，简称**严平稳过程**.

若 $\{X(t),t\in T\}$ 的概率密度函数存在，则严平稳过程条件等价于

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)\\
&=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n).
\end{aligned}
$$

2. 严平稳过程的数字特征　若 $\{X(t),t\in T\}$ 的概率密度函数为 $f_1(x_1;t_1)=f(x_1;t+\varepsilon)$，令 $\varepsilon=-t_1$，则

(1) 均值函数　$m_X(t)=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_1f(x_1;0)\mathrm{d}x_1.$

(2) 均方值函数　$\psi_X^2(t)=E[X^2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_1^2f(x_1;0)\mathrm{d}x_1.$

(3) 方差函数 $D[X(t)]=E[X(t)-m_X(t)]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_X)^2 f_1(x_1;0)\mathrm{d}x_1 .$$

即均值函数、均方值函数与方差函数皆为常数.

(4)相关函数 设有

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f(x_1,x_2;t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon),$$

令 $\varepsilon=-t_1$，$\varepsilon=t_2-t_1$，则

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;0,\tau)=f_2(x_1,x_2,\tau),$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;\tau)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=R_X(\tau),$$

即相关函数是单变量 τ 的函数，仅与 τ 的长度有关.

(5)协方差函数

$$C_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)-m_X][X(t_2)-m_X]$$

$$=E[X(t_1)(t_2)]-m_X^2=R_X(\tau)-m_X^2=C_X(\tau).$$

二、宽平稳过程

1. 设 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 是一个复值二阶矩过程，若 X_T 满足以下条件：

(1) $m_X(t)=E[X(t)]=m_X$（常数），

(2) $C_X(s,t)=E[X(s)-m_X][\overline{X(t)-m_X}]=C_X(s-t)$，

即协方差函数只与 $(s-t)$ 有关，则称 X_T 为**宽平稳过程，简称平稳过程.**

条件(2)也可以写成

$$E[|X(t)|^2]=E[X(t)\overline{X(t)}]<\infty,$$

且 $$E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau).$$

2. 设 $\{X(t),t\in T\}$，$\{Y(t),t\in T\}$ 是两个平稳过程，若互相关函数

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)\overline{Y(t+\tau)}],$$

$$R_{YX}(t,t+\tau)=E[Y(t)\overline{X(t+\tau)}]$$

仅是 τ 的函数，则称 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 是**平稳相关**的，也称 $X(t),Y(t)$ 为**联合平稳随机过程**. 即互相关函数为

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)\overline{Y(t+\tau)}]=R_{XY}(\tau),$$

$$R_{YX}(t,t+\tau)=E[Y(t)\overline{X(t+\tau)}]=R_{YX}(\tau),$$

互协方差函数为

$$\begin{aligned}C_{XY}(t,t+\tau)&=E\{[X(t)-m_X][\overline{Y(t+\tau)-m_Y}]\}\\&=R_{XY}(\tau)-m_X\overline{m}_Y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{YX}(t,t+\tau)&=E\{[Y(t)-m_Y][\overline{X(t+\tau)-m_X}]\}\\&=R_{YX}(\tau)-m_Y\overline{m}_X,\end{aligned}$$

若将 $t+\tau$ 写成 s，则 $\tau=s-t$.

3. 协方差函数与相关函数的性质　设 $\{X(t),t\in T\}$ 是平稳过程，$R_X(\tau)$ 是相关函数，$C_X(\tau)$ 是协方差函数，有

(1) $$R_X(0)\geqslant 0,\quad C_X(0)\geqslant 0;$$

$$R_X(-\tau)=R_X(\tau),\quad C_X(-\tau)=C_X(\tau);$$

$$|R_X(\tau)|\leqslant R_X(0),\quad |C_X(\tau)|\leqslant C_X(0).$$

(2) $R_X(\tau)$ 与 $C_X(\tau)$ 是非负定的.

(3) 若 m_X 是 $X(t)$ 的均值，则 $|m_X^2|\leqslant R_X(0)$.

(4) 若 $\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$ 是具有零均值的平稳过程，$R_X(\tau)=E[X(s)\overline{X(t)}]$ 是相关函数，则 $\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$ 为 p（正整数）次均方可微的充分条件是 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处 $2p$ 次可微且连续，有 $R_X(\tau)$ 处处 $2p$ 次可微，且

$$E[X^{(r)}(s)\overline{X^{(q)}(t)}]=(-1)^r R_X^{(r+q)}(\tau),$$

其中 $$\tau=t-s,\quad 0\leqslant q\leqslant p,\quad 0\leqslant r\leqslant p.$$

(5) 若 $\{X(t),T\in T\}$ 是均方可微的实平稳过程，则

$$E[X(t)X'(t)]=0,$$

即 $X(t)$ 与 $X'(t)$ 互不相关.

(6) 若平稳过程 $\{X(t),t\in T\}$ 满足 $X(t)=X(t+L)$，则称之为**周期平稳过程**，L 为过程的周期，它的相关函数也是周期函数，且与平稳过程的周期相同. 即

$$R_X(\tau)=R_X(\tau+L).$$

(7) 若平稳过程$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$当$|\tau|\to\infty$时，$X(t)$与$X(t+\tau)$相互独立，则有$\lim\limits_{|\tau|\to\infty}C_X(\tau)=0$.

(8) 若有平稳过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$，$T=(-\infty,\infty)$平稳相关，则

$$\overline{R_{XY}(\tau)}=R_{XY}(-\tau),\quad \overline{C_{XY}(\tau)}=C_{YX}(-\tau);$$

$$|R_{XY}(\tau)|^2\leqslant R_X(0)R_Y(0),\quad |C_{XY}(\tau)|^2\leqslant C_X(0)C_Y(0);$$

$$|R_{XY}(\tau)|\leqslant\frac{1}{2}[R_X(0)+R_Y(0)],$$

$$|C_{XY}(\tau)|\leqslant\frac{1}{2}[C_X(0)+C_Y(0)]=\frac{1}{2}(\sigma_X^2+\sigma_Y^2).$$

4. 设$R(\tau)$是平稳过程$\{X(t),t\in\mathbf{R}\}$的相关函数，则下列命题等价：

(1)X_T在$T=\mathbf{R}$中均方连续，　(2)X_T在$t=0$点均方连续，

(3)$R(\tau)$在$\mathbf{R}$上连续，　(4)$R(\tau)$在$\tau=0$点连续.

5. 设$\{X(t),t\in\mathbf{R}\}$是零均值的均方连续平稳过程，$f(t)$是分段连续函数，则在任何有限区间上均方积分$\int_a^b f(t)X(t)$存在，且对任一分段连续函数$g(t)$和$Y\in H$，有

$$\mathrm{Cov}\left(\int_a^b f(t)X(t)\mathrm{d}t,\int_a^b g(s)X(s)\mathrm{d}s\right)$$
$$=\int_a^b\int_a^b R(t-s)f(t)\overline{g(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

$$E\left[\int_a^b f(t)X(t)\mathrm{d}t\cdot Y\right]=\int_a^b f(t)E[X(t)\overline{Y}]\mathrm{d}t.$$

疑 难 解 析

1. 怎样理解平稳过程？

答　一般来说，当产生随机现象的一切主要条件可看做不随

时间的改变而改变时，可以把由此形成的随机过程看做是平稳的. 科学技术中的许多过程都是平稳的.

如果在平稳过程定义中，平稳条件不是对任意 n 满足而是只对 k 满足，即对任意选择的 $t_1<t_2<\cdots<t_k\in T$ 和任意的 τ 值，有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_k;t_1,t_2,\cdots,t_k)$$
$$=F(x_1,x_2,\cdots,x_k;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_k+\tau),$$

而当 $t>k$ 时条件不再满足，则 $X(t)$ 被称为 k 级平稳随机过程.

对严平稳过程或二级平稳过程，若它又是二阶矩过程，则

$$E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F_X(x;t)=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F_X(x)=m_X(\text{常数}),$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=\iint x_1x_2\mathrm{d}F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$$
$$=R_X(t_2-t_1)=R_X(\tau).$$

2. 为什么要研究平稳过程的相关函数?

答 平稳过程是二阶矩过程的一个子类，$X(t)$ 是 H 空间(即希尔伯特(Hilbert)空间)中单参数的一条曲线，$R_X(t-s)=E[X(s)X(t)]$ 即内积 $[X(t),X(t)]$ 只是 $(t-s)$ 的函数，其几何意义是：若把 $X(t)$ 看做三维欧拉空间的一个向量，则 $X(t)$ 是平稳过程指的是曲线上任意两点所对应的向量 $X(s)$ 与 $X(t)$ 之间的内积只依赖于 $(s-t)$. 这时，曲线 $X(t)$，$-\infty<t<\infty$ 是一个大圆. 因为

$$[X(s),X(t)]=[X(s),X(s)]=R_X(0)=c$$

为常数，则 $X(t)$ 的端点都在以原点为中心、半径为 $\sqrt{c}$ 的球面上. 若增加适当的条件，可以证明曲线 $X(t)$ 正好是球面上的大圆.

相关函数的物理意义可以这样理解：在固定位置观察光的干涉现象时，光的波函数 $X(t,\omega)$ 的平均辐射强度是

$$E[X_1^2(t)]=E[X^2(t)]+E[X^2(t-\tau)]+2E[X(t)X(t-\tau)].$$

设其统计特性对时间推移保持不变，是一平稳过程，则有

$$E[X_1^2(t)]=2[R_X(0)+R_X(\tau)],\quad R_X(\tau)=E[X(t)X(t-\tau)].$$

相关函数 $R_X(\tau)$ 给出随机现象的干涉条纹形状.

由平稳过程定义可知，相关函数的研究可以解决许多应用问题，特别是正态平稳过程的情形.

方法、技巧与典型例题分析

第一类问题是确定问题是否为平稳过程，是严的还是宽的，是复值的还是实值的，是正态的还是非正态的，要由定义出发认真讨论；第二类问题是在确定平稳随机过程的同时，计算过程的数字特征，这要求读者熟练掌握概率论的知识（特别是数学期望的知识）和级数的技巧；第三类问题是证明题，要认真理解题意，运用已知条件，逐步求证分析，有一定难度.

例 1 设$\{A_n,1\leqslant n\leqslant N\}$，$\{B_n,1\leqslant n\leqslant N\}$是互不相关的实随机变量序列，且

$$E[A_n]=E[B_n]=0,\quad E[A_nB_m]=0,\ 1\leqslant m,n\leqslant N,$$

$$E[A_nA_m]=E[B_nB_m]=\delta_{nm}\sigma_n^2,\quad m,n=1,2,\cdots,N.$$

又设$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N$是任意正数，证明：

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N}[A_n\cos\omega_nt+B_n\sin\omega_nt],\quad -\infty<t<\infty$$

是平稳过程.

证 因为

$$E[X(t)]=0,$$

$$E[X(t)X(s)]=\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^2[\cos\omega_nt\cos\omega_ns+\sin\omega_nt\sin\omega_ns]$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^2\cos[\omega_n(t-s)]$$

符合平稳过程定义条件，所以$\{X(t),-\infty<t<\infty\}$是平稳过程.

例 2 设热噪声的取样观察值为$\{X(t),t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，$X(t)$是一实随机序列，且有下列性质：(1) $X(t)$相互独立；(2) $X(t)\sim N(0,\sigma^2)$分布. 求其均值与相关函数.

解

$$m_X(t)=E[X(t)]=0.$$

$$D[X(t)] = \sigma^2,$$

$$E[X(t+\tau)X(t)] = 0 \quad (\text{由相互独立知}),\ \tau \neq 0,$$

$$E[X(t)X(t)] = \sigma^2,$$

故

$$R_X(\tau) = \begin{cases} \sigma^2, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases}$$

由于相关函数只与 τ 有关而与 t 无关,且均值为常数,所以 $X(t)$ 是一平稳随机序列,且为实平稳序列.

例 3 设有正弦波过程 $X(t)=A\cos(\omega t+\Theta)$,其中振幅 A、角频率 ω 是常数,相位 Θ 是在 $[-\pi,\pi]$ 上服从均匀分布的随机变量,求 $X(t)$ 的均值与相关函数,确定 $\{X(t),t\in T\}$ 是平稳过程.

解 因为

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\pi}^{\pi} A\cos(\omega t+\theta)\,\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{A}{2\pi}\sin(\omega t+\theta)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} A^2\cos(\omega t_1+\theta)\cos(\omega t_2+\theta)\,\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}A^2\cos\omega(t_1-t_2) = \frac{A^2}{2}\cos\omega\tau, \quad \tau = t_1 - t_2,$$

所以,$R_X(t_1,t_2)$ 与 t_1,t_2 无关,只与 $\tau=t_1-t_2$ 有关.

从而知 $\{X(t),t\in[-\pi,\pi]\}$ 是宽平稳过程.

例 4(滑动平均) 设 $\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是标准不相关序列,即 $E[X(n)]=0,E[X(n)\overline{X(m)}]=0,m\neq n,E[|X(n)|^2]=1$,证明:

$$Y(n) = a_0X(n) + a_1X(n-1) + \cdots + a_s(n-s)$$

是平稳序列,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_s$ 是复数序列.

证 因为 $E[Y(n)]=0$,

$$E[Y(n+m)\overline{Y(n)}] = E\Big[\sum_{k=0}^{s}a_kX(n+m-k)\ \overline{\sum_{i=0}^{s}a_iX(n-i)}\Big]$$

$$= \sum_{i=0}^{s}\sum_{k=0}^{s} a_k \bar{a}_i E[X(n+m-k)X(n-i)]$$

$$= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant s \\ 0 \leqslant k-m \leqslant s}} a_k \bar{a}_{k-m},$$

所以，Y_n 的均值为常数，相关函数只与 m 有关而与 n 无关，故 Y_n 也是平稳随机序列.

例 5 设 X_n，$n=1,2,\cdots$ 为一列随机变量，$E[X_n]=0$，$E[X_i X_k]=0, i \neq k, E[X_k \bar{X}_k]=E[|X_k|^2]=b_k>0$，设有 $\{\lambda_k\}$，$k=1,2,\cdots$ 是两两互不相等的实数列，且 $\sum_{k=1}^{\infty} E[|X_k|^2] < \infty$，证明：$Y(t)=\sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j\lambda_k t}$ 是平稳随机过程.

解 因为

$$E[Y(t)]=0,$$

$$E[Y(t+\tau)\overline{Y(t)}]$$

$$= E\Big[\sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j\lambda_k(t+\tau)} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{X}_i e^{-j\lambda_i t}\Big]$$

$$= E\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} X_k \bar{X}_i e^{j\lambda_k(t+\tau)} e^{-j\lambda_i t}\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} E[X_k \bar{X}_i] e^{j\lambda_k(t+\tau)} e^{-j\lambda_i t} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{j\lambda_k \tau},$$

所以，相关函数是时间差 τ 的函数，即

$$R_X(\tau) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{j\lambda_k \tau}, & \tau \neq 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k, & \tau = 0, \end{cases}$$

从而 $Y(t)$ 是一平稳随机过程. 其中 b_k 代表谐波分量 $X_k e^{j\lambda_k t}$ 的功率的平均值.

例 6（随机相位过程） 设 $S(t)$ 是一周期为 L 的函数，φ 是在 $[0,L]$ 上均匀分布的随机变量，称 $X(t)=S(t+\varphi)$ 是随机相位周期

过程，讨论其是否为平稳过程.

解 因为

$$E[X(t)]=E[S(t+\varphi)]=\int_0^L \frac{1}{L}S(t+\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$\xlongequal{u=t+\varphi}\int_t^{t+L}\frac{1}{L}S(u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{L}\int_t^L S(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{L}\int_L^{t+L}S(u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{L}\int_t^L S(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{L}\int_L^{t+L}S(u-L)\mathrm{d}u\ (令\ u-L=v)$$

$$=\frac{1}{L}\int_t^L S(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{L}\int_0^t S(v)\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{L}\int_0^L S(u)\mathrm{d}u=常数,$$

又 $R_X(t,t+\tau)$

$$=E[X(t)X(t+\tau)]=\frac{1}{L}\int_0^L S(t+\varphi)S(t+\tau+\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{L}\int_t^{t+L}S(u)S(u+\tau)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{L}\int_t^L S(u)S(u+\tau)\mathrm{d}u$$

$$+\frac{1}{L}\int_L^{t+L}S(u-L)S(u-L+\tau)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{L}\int_t^L S(u)S(u+\tau)\mathrm{d}u+\frac{1}{L}\int_0^t S(v)S(v+\tau)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{L}\int_0^L S(u)S(u+\tau)\mathrm{d}u=R_X(\tau),$$

所以，随机相位过程是平稳过程.

从以上例题可以看出，在求均值函数与相关函数时，在连续函数情形时，计算中要注意利用分段求积、周期函数、变量代换等积分技巧.

例 7 设$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$是一个零均值的平稳过程,且不恒等于一个随机变量,问 $X(t)+X(0),t\in(-\infty,\infty)$是否仍是平稳过程.

解 由题设知 $E[X(t)]=0,R_X(t,t+\tau)=R_X(\tau)$.

设
$$Y(t)=X(t)+X(0),$$
则
$$E[Y(t)]=E[X(t)]+E[X(0)]=X(0),$$
$$\begin{aligned}R_Y(t,t+\tau)&=E\{[X(t)+X(0)][X(t+\tau)+X(0)]\}\\&=E[X(t)X(t+\tau)]+E[X(0)X(t+\tau)]\\&\quad+E[X(t)X(0)]+E[X(0)X(0)]\\&=R_X(\tau)+X(0)\{E[X(t+\tau)]+E[X(t)]\}\\&\quad+X^2(0),\end{aligned}$$
所以,$Y(t)=X(t)+X(0)$不是平稳过程.

例 8 复随机过程 $Z(t)=X(t)+\mathrm{j}Y(t)$,若 $E[Z(t)]=E[X(t)]+\mathrm{j}E[Y(t)]=m_Z$是复常数,相关函数$E[Z(t)Z(t+\tau)]=R_Z(\tau)$是只与 τ 有关的复值函数,则称 $Z(t)$是复平稳过程.

设 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$是 n 个实随机变量,$\omega_k(k=1,2,\cdots,n)$是 n 个实常数. 问:A_k 以及各 A_k 之间应满足什么条件才能使 $Z(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k t}$ 是一个复平稳过程?

解 因为
$$m_Z(t)=E[Z(t)]=E\Big[\sum_{k=1}^{n}A_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k t}\Big]=\sum_{k=1}^{n}E(A_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k t},$$
可知当且仅当 $E(A_k)=0$ 时,$m_Z(t)$才与 t 无关. 又
$$\begin{aligned}R_Z(t,t+\tau)&=E[Z(t)\,\overline{Z(t+\tau)}]\\&=E\Big[\sum_{k=1}^{n}A_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k t}\sum_{r=1}^{n}A_r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_r(t+\tau)}\Big]\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}E[A_kA_r]\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_k-\omega_r)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_r\tau},\end{aligned}$$

当且仅当 $E[A_kA_r]=\begin{cases}\sigma_k^2, & k=r\\ 0, & k\neq r\end{cases}$ 时，有

$$R_Z(\tau)=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 e^{-j\omega_k\tau},$$

知此时 $R_k(\tau)$ 与 t 无关. 所以，$Z(t)$ 为复平稳过程的条件是

$$E[A_k]=0,\quad k=1,2,\cdots,n;$$

$$E[A_kA_l]=\begin{cases}\sigma_k^2, & k=l,\\ 0, & k\neq l,\end{cases}\quad k,l=1,2,\cdots,n.$$

例 9 设 $\{X(t),t\in T\}$ 是一均方可微的实宽平稳过程，令 $Y(t)=\dfrac{d}{dt}X(t),t\in T$. 证明：$\{Y(t),t\in T\}$ 是实宽平稳过程.

证 因为 $E[Y(t)]=E[X'(t)]=\dfrac{dE[X(t)]}{dt}=0$,

$$\begin{aligned}R_Y(t,t+\tau)&=E[Y(t)Y(t+\tau)]=E[Y(t_1)Y(t_2)]\\&=E[X'(t_1)X'(t_2)]=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}R_X(t_2-t_1)\\&=\frac{\partial}{\partial t_1}R_X'(t_2-t_1)=-R_X''(t_2-t_1)=-R_X''(\tau),\end{aligned}$$

所以，依定义条件，$\{Y(t),t\in T\}$ 是实宽平稳过程.

例 10（随机电报信号过程） 设随机过程 $\{X(t),t\in[0,\infty)\}$，$X(t)=X(0)(-1)^{N(t)}$，其中 $P\{X(0)=1\}=P\{X(0)=-1\}=1/2$，$\{N(t),t\in[0,\infty)\}$ 是泊松过程，且 $N(t)$ 与 $X(0)$ 相互独立，证明 $\{X(t),t\in[0,\infty)\}$ 是平稳过程.

证 由题设 $P\{X(t)=1\}=P\{X(t)=-1\}=1/2$，

故
$$E[X(t)]=0.$$

$$\begin{aligned}R_X(t,t+\tau)&=E[X(t)X(t+\tau)]\ (\tau>0)\\&=P\{X(t)X(t+\tau)=1\}-P\{X(t)X(t+\tau)=-1\}\\&=P\{N(\tau)=\text{偶数}\}-P\{N(\tau)=\text{奇数}\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-\lambda k}\end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!} = e^{-2\lambda\tau},$$

当 $\tau<0$ 时有类似结果，即应有

$$R_X(t,t+\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}.$$

故知 $\{X(t),t\in[0,\infty)\}$ 是宽平稳过程.

注意 应很好去体会相关函数等式中为什么有第二个和第三个等号成立.

例 11 有一维游走过程 Y_n，其中 $Y_0 = 0, Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，$X_i$ 是分布列为 $P\{X_i=-1\}=q=1-p, P\{X_i=1\}=p$ 的随机变量，且各 X_i 相互独立. 求 $P\{Y_n=m\}, E[Y_n], D[Y_n]$，并讨论当 $p>q$ 时 Y_n 是否平稳.

解 由特征函数定义，有

$$\varphi_{X_i}(v) = E[e^{jvX_i}] = pe^{jv} + qe^{-jv}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

又因 $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，所以

$$\varphi_{Y_n}(v) = (pe^{jv} + qe^{-jv})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^{n-k} q^k e^{j(n-k)v} e^{-jkv}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^{n-k} q^k e^{j(n-2k)v}.$$

依定义 $$\varphi_{Y_n}(v) = \sum_m P\{Y_n = m\} e^{jmv},$$

故 $$P\{Y_n=n-2k\}=\frac{n!}{(n-k)!\ k!}p^{n-k}q^k, \quad k=0,1,\cdots,n.$$

令 $m=n-2k$，即得

$$P\{Y_n = m\} = \frac{n!}{[(n-m)/2]![(n+m)/2]!}p^{(n+m)/2}q^{(n-m)/2},$$

$$m = -n, -n+2, \cdots, n,$$

$$E[Y_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n}[1p + (-1)q] = n(p-q).$$

又因 $$E[X_i^2]=1^2p+(-1)^2q=p+q=1,$$

故 $$D[X_i]=E[X_i^2]-\{E[X_i]\}^2=1-(p-q)^2,$$

$$D[Y_n]=n^2[1-(p-q)^2].$$

当 $p>q$ 时，因为 Y_n 的均值与方差都有随 n 线性增加的趋势，所以 Y_n 是非平稳的.

例 12 给定一个随机变量 Θ，其特征函数为 $\varphi(v)$，另给定常数 ω，构造一个随机过程 $X(t)=\cos(\omega t+\Theta)$，证明：当且仅当 $\varphi(1)=\varphi(2)=0$ 时，$X(t)$是宽平稳过程.

证 因为均值函数

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[\cos(\omega t+\Theta)] \\ &= E[\cos\Theta]\cos\omega t - E[\sin\Theta]\sin\omega t, \end{aligned}$$

显然，当且仅当 $\varphi(1)=E[\cos\Theta]+\mathrm{j}[\sin\Theta]=0$ 时，$m_X(t)$才与 t 无关. 又相关函数

$$\begin{aligned} R_X(t+\tau,t) &= E\{\cos[\omega(t+\tau)+\Theta]\cos(\omega t+\Theta)\} \\ &= \frac{1}{2}E[\cos\omega\tau+\cos(2\omega t+\omega\tau+2\Theta)] \\ &= \frac{1}{2}\cos\omega\tau+\frac{1}{2}E[\cos 2\Theta]\cos(2\omega t+\omega\tau) \\ &\quad -\frac{1}{2}E[\sin 2\Theta]\sin(2\omega t+\omega\tau), \end{aligned}$$

显然，当且仅当 $\varphi(2)=E[\cos 2\Theta]+\mathrm{j}E[\sin 2\Theta]=0$，即有 $E[\cos 2\Theta]=0$，$E[\sin 2\Theta]=0$ 时，$R_X(t+\tau,t)$与 t 无关，仅与 τ 有关.

因而，当且仅当 $\varphi(1)=\varphi(2)=0$ 时，$X(t)$是一个宽平稳过程.

例 12 与例 3 极其相似，讨论的是同一个问题（$\{X(t)\}$是平稳过程），但两者从不同角度出发. 读者应逐步掌握从不同角度讨论一个问题的能力.

例 13 设随机过程由下述三个样本函数：$X(t,e_1)=1$，$X(t,e_2)=\sin t$，$X(t,e_3)=\cos t$ 组成，且等概率发生.

(1)求均值 $m_X(t)$与相关函数 $R_X(t_1,t_2)$；

(2)讨论$\{X(t),t\in T\}$是否为平稳过程.

解 (1) $m_X(t)=E[X(t)]=\frac{1}{3}[1+\sin t+\cos t]$,

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\sin t_1\sin t_2+\frac{1}{3}\cos t_1\cos t_2$$
$$=\frac{1}{3}(1+\cos\tau),\quad \tau=t_1-t_2.$$

(2) 显然,均值$m_X(t)$与t有关,所以不是平稳过程.

例 14 设有随机过程$Z(t)=X\sin t+Y\cos t$,其中X和Y是相互独立的随机变量,它们都分别以 2/3 和 1/3 的概率取值-1和 2,求$Z(t)$的均值函数与自相关函数,并讨论$Z(t)$的平稳性.

解 $m_Z(t)=E[X\sin t+Y\cos t]=E[X]\sin t+E[Y]\cos t=0$,

$$R_Z(t_1,t_2)=E[(X\sin t_1+Y\cos t_1)(X\sin t_2+Y\cos t_2)]$$
$$=E[X^2]\sin t_1\sin t_2+E[XY](\sin t_1\cos t_2+\cos t_1\sin t_2)$$
$$+E[Y^2]\cos t_1\cos t_2.$$

因为 $E[X^2]=E[Y^2]=2,\quad E[XY]=E[X]E[Y]=0$,

所以 $R_Z(t_1,t_2)=2\cos(t_1-t_2)=2\cos|\tau|$.

从而,可以确定$Z(t)$是宽平稳过程.又因为

$$E\{[Z(t)]^3\}=E[(X\sin t+Y\cos t)^3]$$
$$=E[X^3]\sin^3 t+3E[X^2Y]\sin^2 t\cos t$$
$$+3E[XY^2]\sin t\cos^2 t+E[Y^3]\cos^3 t,$$

而 $$E[X^3]=E[Y^3]=(-1)^3\cdot\frac{2}{3}+2^3\cdot\frac{1}{3}=2,$$

$$E[X^2Y]=E[X^2]E[Y]=0,\quad E[XY^2]=0,$$

所以 $$E\{[Z(t)]^3\}=2(\sin^3 t+\cos^3 t).$$

可见,其三阶矩与t有关,不是严平稳过程.

例 15 证明:当且仅当U与V是不相关的随机变量,并且均值都为零、方差相等时,过程$X(t)=U\cos\omega t+V\sin\omega t$是宽平稳过程.

证　充分性　设 U 和 V 是满足条件的随机变量，则

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[U\cos\omega t+V\sin\omega t]$$
$$=E[U]\cos\omega t+E[V]\sin\omega t=0,$$

$$R_X(t+\tau,t)$$
$$=E\{[U\cos\omega(t+\tau)+V\sin\omega(t+\tau)][U\cos\omega t+V\sin\omega t]\}$$
$$=E\{U^2\cos\omega(t+\tau)\cos\omega t+V^2\sin\omega(t+\tau)\sin\omega t\}$$
$$+E\{[UV][\cos\omega(t+\tau)\sin\omega t+\sin(t+\tau)\cos\omega t]\}$$
$$=\sigma^2\cos\omega\tau\quad(\sigma^2=D[U]=D[V]).$$

所以，满足定义条件，$X(t)$是宽平稳过程.

必要性　设 $X(t)$是宽平稳过程，若

$$E[U]=m_U,\quad E[V]=m_V,$$

则
$$m_X(t)=m_u\cos\omega t+m_V\sin\omega t.$$

若 $m_X(0)=0$，有 $m_u=0$；取 $t=\frac{\pi}{2\omega}$时，有 $m_V=0$. 若 $m_X(t)\neq0$，取 $t=0$ 与 $t=\frac{\pi}{2\omega}$，有 $m_X=m_U=m_V$，于是

$$1=\cos\omega t+\sin\omega t,$$

显然，在一些点，如 $t=\frac{\pi}{4\omega}$点，上式不成立，故必须有 $m_U=m_V=0$.

又

$$E[X(t+\tau)X(t)]=E[U^2]\cos\omega(t+\tau)\cos\omega t+E[V^2],$$
$$\sin\omega(t+\tau)\sin\omega t+E[UV]\sin\omega(\tau+2t),$$

要上式与 t 无关，则必须 $E[UV]=0$，$E[U^2]=E[V^2]$，即给出了题设条件的必要性.

例 16　设有复随机过程 $Z(t)=Z_1e^{j\lambda_1 t}+Z_2e^{j\lambda_2 t}$，$t\in(-\infty,\infty)$，其中 λ_1,λ_2 是实数，$\lambda_1\neq\lambda_2$，而 Z_1,Z_2 是不相关的复随机变量. 已知 $E[Z_1]=E[Z_2]=0$，$E[|Z_1|^2]=\sigma_1^2$，$E[|Z_2|^2]=\sigma_2^2$，讨论 $Z(t)$ 的平稳性.

解　$m_Z(t)=E[Z(t)]=E[Z_1e^{j\lambda_1 t}+Z_2e^{j\lambda t}]=0$，

$$
\begin{aligned}
R_Z(t,t+\tau) &= E[Z_t, Z_{t+\tau}] \\
&= E[(Z_1 e^{j\lambda_1 t} + Z_2 e^{j\lambda_2 t})\overline{(Z_1 e^{j\lambda_1(t+\tau)} + Z_2 e^{j\lambda_2(t+\tau)})}] \\
&= E[|Z_1|^2]e^{-j\lambda_1\tau} + E[|Z_2|^2]e^{-j\lambda_2\tau} \\
&= \sigma_1^2 e^{-j\lambda_1\tau} + \sigma_2^2 e^{-j\lambda_2\tau},
\end{aligned}
$$

显然,相关函数仅与 τ 有关而与 t 无关,所以$\{Z(t)\}$是复平稳过程.

顺便指出,复平稳过程的相关函数有如下性质:

(1) $R_Z(0)=E(|Z(t)|^2)$; (2) $|R_Z(\tau)|\leqslant R_Z(0)$;

(3) $R_Z(-\tau)=\overline{R_Z(\tau)}$; (4) $R_Z(\tau)$具有非负定性.

例 17 设$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$和$\{Y(t),t\in(-\infty,\infty)\}$是两个随机过程,$X(t)=U\cos\omega t+V\sin\omega t$,$Y(t)=-U\sin\omega t+V\cos\omega t$. 其中$U$,$V$是两个均值为零,方差为$\sigma^2$的随机变量,且互不相关. 证明:$X(t)$与$Y(t)$是两个平稳相关的随机过程.

证 显然,$X(t)$与$Y(t)$是两个宽平稳过程.

$$
R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau) = \sigma^2\cos\omega\tau,
$$
$$
R_Y(t_1,t_2) = R_Y(\tau) = \sigma^2\cos\omega\tau,
$$
$$
E[X(t)] = E[Y(t)] = 0,
$$

则

$$
\begin{aligned}
R_{XY}(t_1,t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\
&= E\{[U\cos\omega t_1 + V\sin\omega t_1][-U\sin\omega t_2 + V\cos\omega t_2]\} \\
&= -\sigma^2\sin\omega\tau,\ \tau = t_2 - t_1.
\end{aligned}
$$

类似地,有 $$R_{YX}(t_1,t_2)=\sigma^2\sin\omega\tau.$$

于是知,$X(t)$与(t)是平稳相关的随机过程.

例 18 设$\{X(t),t\in T\}$是实平稳过程,$R_X(\tau)=25+\dfrac{4}{1+6\tau^2}$,计算$X(t)$的均值与方差.

解 因为$\lim\limits_{|\tau|\to\infty}R_X(\tau)=|m_X|^2=25$,所以$X(t)$的均值

$$
E[X(t)]=m_X=\pm 5.
$$

又因为$\sigma_X^2=C_X(0)=R_X(0)-m_X^2=4$,所以$X(t)$的方差

$D[X(t)]=4.$

例 19 设 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 是正态过程，且 $E[|X(t)|^2]\neq 0$，证明：X_T 是马尔可夫过程的充要条件是其规范化相关函数满足

$$r(s,u)=r(s,t)r(t,u),\quad s\leqslant t\leqslant u, \tag{①}$$

其中规范化相关函数

$$r(s,t)=\frac{R_X(s,t)}{\sqrt{R_X(s,s)R_X(t,t)}}.$$

证　必要性　设均值为零，$X(u)$ 服从二维正态分布，则由条件期望，有

$$E[X(u)\mid X(t)]=\frac{E[X(t)X(u)]}{E[X^2(t)]}X(t),$$

由马尔可夫性，上式等于

$$\begin{aligned}&E[X(u)\mid X(t),X(s)]\\&=E[X(u)\mid X(t)]=\frac{E[X(t)X(u)]}{E[X^2(t)]}X(t).\end{aligned}$$

对等式两边乘以 $X(s)$，并取期望，可得

$$\begin{aligned}&E\{X(s)E[X(u)\mid X(t),X(s)]\}\\&=\frac{E[X(t)X(u)]}{E[X^2(t)]}E[X(t)X(s)],\end{aligned}$$

由条件期望性质，得

$$E\{X(s)E[X(u)\mid X(t),X(s)]\}=E[X(s)X(u)],$$

即必要性得证.

充分性　由条件得

$$\begin{aligned}&E\left[X(u)-\frac{R(t,u)}{R(t,t)}X(t)X(s)\right]\\&=R(s,u)-\frac{R(t,u)}{R(t,t)}R(s,t)\\&=\sqrt{R(s,s)R(u,u)}[r(s,u)-r(s,t)r(t,u)]=0,\end{aligned}$$

所以，对任意 $t_1<t_2<\cdots<t_n<u$，$\{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)\}$ 的最佳

线性预测是$\frac{R(t_n,u)}{R(t_n,t_n)}X(t_n)$. 由于$\{X(t)\}$是正态过程，最佳线性预测即为最佳预测，有

$$E[X(u)\mid X(t_n),X(t_{n-1}),\cdots,X(t_1)]=\frac{R(t_n,u)}{R(t_n,t_n)}X(t_n).$$

当 $X(t)$是正态时，上式右边即 $E[X(u)|X(t_n)]$.

当过程 X_T 是平稳过程时，命题成为

$$r(t+s)=r(t)r(s),\quad t,s\geqslant 0, \tag{②}$$

即知，平稳正态过程是马尔可夫过程的充要条件是式②成立.

例 20 证明：(1) 若 $X_T=\{X(n),\ n=0,\pm1,\cdots\}$是平稳正态时间序列，$R_X(0)\neq0$，则 X_T 是马尔可夫过程的充分条件是相关函数有形式 $R_X(n)=a^nR_X(0),n\geqslant0,|a|\leqslant1$.

(2) 若 $X_T=\{X(t),\ t\in(-\infty,\infty)\}$是平稳正态过程，则 X_T 是均方连续的马尔可夫过程的充要条件是相关函数有形式

$$R_X(t)=\mathrm{e}^{at}\times R_X(0),\ t\geqslant0,\mathrm{Re}a\leqslant0.$$

证 (1) 若 X_T 是马尔可夫的，则上例中式②成立，即

$$r(n)=r(n-1)r(1)=r(n-2)r(1)r(1)=\cdots=r^n(1)$$

或

$$\frac{R_X(n)}{R_Y(0)}=\left(\frac{R_X(1)}{R_X(0)}\right)^n.$$

令 $a=R(1)/R(0)$，则命题成立. 反之，若命题成立，则标准化相关函数 $r(n)=R_X(n)/R_X(0)=a^{|n|}$，满足例 19 中式②，从而命题得证.

(2) 即连续参数情形. 若 X_T 是马尔可夫的，则例 19 中式②成立. 又由于 X_T 均方连续，故 $r(t)$是连续的，于是式②有连续函数解 $r(t)=\mathrm{e}^{at}$，$t>0$. 又由平稳过程相关函数性质知，$|r(t)|\leqslant1$，所以 Re $a\leqslant0$. 反之，若 $r(t)$满足命题要求，可以验证，式②也成立. 所以 X_T 是马尔可夫的. 又因为满足命题要求，故 X_T 还是均方连续的，从而命题得证.

第二节　平稳过程的各态历经性

主要内容

一、平稳过程的各态历经性即遍历性

1. 设$\{X(t), t\in(-\infty,\infty)\}$是均方连续的平稳过程，则称

$$\langle X(t)\rangle = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\mathrm{d}t$$

为具有均方连续的平稳过程的**时间均值**.

2. 设$\{X(t), t\in(-\infty,\infty)\}$和$\{X(t)X(t+\tau),\ t,t+\tau\in(-\infty,\infty)\}$（$\tau$固定）是均方连续的平稳过程，则称

$$\langle X(t)\ \overline{X(t+\tau)}\rangle = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\ \overline{X(t+\tau)}\mathrm{d}t$$

为具有均方连续的平稳过程的**时间相关函数**.

3. 设$\{X(t), t\in(-\infty,\infty)\}$是均方连续的平稳过程.

(1)若$\langle X(t)\rangle = E[X(t)] = m_X$以概率1成立，即对任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}P\{|\langle X(t)\rangle - E[X(t)]|\leqslant\varepsilon\} = 1,$$

则称**均方连续的平稳过程的均值有各态历经性**.

(2)若$\langle X(t)\overline{X(t+\tau)}\rangle = E[X(t)\overline{X(t+\tau)}] = R_X(\tau)$依概率1成立，即对任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}P\{|\langle X(t)\ \overline{X(t+\tau)}\rangle - R_X(\tau)|\leqslant\varepsilon\} = 1,$$

则称**均方连续的平稳过程的相关函数有各态历经性**.

(3)若均方连续的平稳过程$\{X(t),\ t\in(-\infty,\infty)\}$的均值与相关函数都有各态历经性，则称此平稳过程是**各态历经过程或遍历的**.

4. 均值各态历经性定理　均方连续的平稳过程$\{X(t),\ t\in$

$(-\infty,\infty)\}$的均值具有各态历经性的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)(R_X(\tau)-|m_X|^2)\mathrm{d}\tau=0.$$

5. 相关函数的各态历经性定理　设$\{X(t),\ t\in(-\infty,\infty)\}$和$\{X(t)\overline{X(t+\tau)},\ t,t+\tau\in(-\infty,\infty)\}$($\tau$固定)为均方连续的平稳过程,则$X(t)$的相关函数$R_X(\tau)$具有各态历经性的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{2T}\right)[B(\tau_1)-|R_X(\tau)|^2]\mathrm{d}\tau_1=0,$$

其中　$B(\tau_1)=E[X(t+\tau+\tau_1)\overline{X(t+\tau_1)X(t+\tau)\overline{X(t)}}]$.

注意　τ是固定的,τ_1是变动的.

6. 均方连续的平稳过程$\{X(t),t\in[0,\infty)\}$的时间均值$\langle X(t)\rangle=\mathrm{l.i.m}\,\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\mathrm{d}t$与集均值$E[X(t)]=m_X$以概率1相等的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)(R_X(\tau)-|m_X|^2)\mathrm{d}\tau=0.$$

若$\{X(t),\ t\in[0,\ \infty)\}$是实平均方连续的平稳过程,则其充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)(R_X(\tau)-m_X^2)\mathrm{d}\tau=0.$$

7. 均方连续的平稳过程$\{X(t),t\in[0,\infty)\}$和$\{X(t)X(t+\tau),\ t,\ t+\tau\in[0,\infty)\}$($\tau$固定)的时间相关函数$\langle X(t)\overline{X(t+\tau)}\rangle=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\overline{X(t+\tau)}\mathrm{d}t$与相关函数$R_X(\tau)=E[X(t)\overline{X(t+\tau)}]$依概率1相等的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)(B(\tau_1)-|R_X(\tau)|^2)\mathrm{d}\tau_1=0,$$

其中　$B(\tau_1)=E[X(t+\tau+\tau_1)\overline{X(t+\tau_1)X(t+\tau)\overline{X(t)}}]$.

若$\{X(t),\ t\in[0,\infty)\}$是实的均方连续的平稳随机过程,则充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau_1}{T}\right)\{B(\tau_1)-[R_X(\tau)]^2\}\mathrm{d}\tau_1 = 0.$$

8. 设$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$是均方连续的平稳过程,$E[X(t)]=0$,其均值函数具有各态历经性的充要条件是:它的谱函数$F_X(\omega)$在$\omega=0$处连续.

9. 设$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$是均方连续的平稳过程,其自相关函数具有各态历经性的充要条件是:它的谱函数$F_X(\omega)$是连续函数.

10. 设$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$是平稳正态过程,若有$\lim\limits_{\tau_1\to\infty}R_X(\tau_1)=0$,则$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=R_X(\tau)$.

11. 平稳过程的采样定理　设$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$是均方连续的平稳过程,若其谱函数$F_X(\omega)$满足条件$\int_{|\omega|\geqslant 2\pi B}\mathrm{d}F(\omega)=0$,则取采样间隔$\Delta=\frac{1}{2B}$时,有下式成立:

$$X(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Delta)\left\{\sin\left[\frac{(t-k\Delta)}{\Delta\pi}\right]\Big/\left[\frac{(t-k\Delta)}{\Delta\pi}\right]\right\}.$$

12. 平稳过程$\{X(t),t\in[0,\infty)\}$是均方连续的,则$X(t)$的均值函数估计式是

$$\widehat{m}_X=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_N,$$

相关函数的估计式是

$$\widehat{R}_X(\tau)=\frac{1}{N-r}\sum_{k=1}^{N-r}x_kx_{k+r},\ r=1,2,\cdots,m<N,$$

其中N是采样值的个数,r可取小于N的任意的正整数.

疑 难 解 析

为什么要讨论平稳过程的各态历经性？什么是平稳过程的各态历经性？其理论依据是什么？

答　要讨论平稳随机过程的数字特征,就应该知道一族样本

函数. 而样本函数往往需要经过大量的观察试验,然后用数理统计的点估计理论进行估计才能取得,其要求是很高的. 讨论平稳过程的历经性,就是讨论能否在较宽松的条件下,用一个样本函数去近似计算平稳过程的均值、协方差函数等数字特征.

平稳过程的各态历经性,用数学语言来说,即关于(充分长)时间的平均值,近似地等于观察总体的集合平均值. 如对均方连续的实平稳过程$\{X(t),\ t\in(-\infty,\infty)\}$,$m_X=E[X(t)]$是$X(t)$的均值,是平稳过程中所有可能出现的曲线(样本函数)的集合平均值. 而对$X(t)$中任一现实曲线$x(t)$,$m_T=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\mathrm{d}t$是$x(t)$在$[-T,T]$上对时间$t$的平均值,称为时间平均值. 显然$X(t)$的每一曲线都在$m_X$的上下波动,则可以想象,当$T$充分长时该现实曲线$x(t)$必定经历过$X(t)$中曲线所经历过的所有状态,所以曲线$x(t)$可以很好地代表实平稳过程$\{X(t),\ t\in(-\infty,\infty)\}$的整个性质,如$m_T\approx m_X$. 对于这样的平稳过程,称具有各态历经性,但只在一定条件下的平稳过程,才具有各态历经性.

各态历经性的理论依据是大数定律. 因为随机过程的样本函数按不同时刻取平均,随不同的样本而改变,是一个随机变量. 但当时间充分加长时,随机过程的样本函数的按时间平均依大数定律越来越近似过程的平均(如$m_T\neq m_X$).

方法、技巧与典型例题分析

讨论平稳过程的各态历经性一般都是从定义出发,验证定义的条件. 讨论中要注意运用积分的技巧,特别是周期函数的积分性质. 计算相关函数等数字特征要注意问题的具体情形,防止出错.

例 1 设$C_X(\tau)$是平稳过程$X(t)$的协方差函数,证明:若$C_X(\tau)$绝对可积,即$\int_{-\infty}^{\infty}|C_X(\tau)|\mathrm{d}\tau<\infty$,则$X(t)$的均值具有各态

历经性.

证 设$\int_{-\infty}^{+\infty}|C_X(\tau)|\mathrm{d}\tau=A<\infty$,且$A>0$.因为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)[R_X(\tau)-|m_X|^2]\mathrm{d}\tau\\&\leqslant\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left|1-\frac{\tau}{2T}\right||R_X(\tau)-m_X^2|\mathrm{d}\tau\\&\leqslant\frac{1}{T}\int_0^{2T}|C_X(\tau)|\mathrm{d}\tau\leqslant\frac{1}{T}\int_0^{\infty}|C_X(\tau)|\mathrm{d}\tau\leqslant\frac{A}{T},\end{aligned}$$

所以 $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)[R_X(\tau)-|m_X|^2]\mathrm{d}\tau=0.$$

故依定理知,$X(t)$的均值具有各态历经性.

例2 设$S(t)$是一周期为T的函数,Θ是在$(0,T)$内服从均匀分布的随机变量,则称$X(t)=S(t+\Theta)$是随机相位周期过程,是一个平稳过程.证明:随机相位周期过程是各态历经的.

证 设周期为T_0,则

$$\begin{aligned}E[X(t)]&=E[S(t+\Theta)]=\int_0^{T_0}S(t+\Theta)\frac{1}{T_0}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{T_0}\int_t^{t+T_0}S(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}S(\varphi)\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

而 $$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[\frac{2T}{T_0}\int_0^{T_0}S(t+\theta)\mathrm{d}t\right]\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}S(t+\theta)\mathrm{d}t=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}S(t+\theta)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T_0}\int_\theta^{\theta+T_0}S(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}S(\varphi)\mathrm{d}\varphi=E[X(t)].\end{aligned}$$

由周期性可得

$$\begin{aligned}\langle X(t)\rangle&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}S(t+\theta)\mathrm{d}t\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{2T}{T_0}\int_0^{T_0}S(t+\theta)\mathrm{d}t=E[X(t)],\end{aligned}$$

$$R_X(t,t+\tau)=E[S(t+\Theta)S(t+\tau+\Theta)]$$
$$=\int_0^{T_0}S(t+\theta)S(t+\theta+\tau)\frac{1}{T_0}\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{1}{T_0}\int_t^{T_0+t}S(\varphi)S(\varphi+\tau)\mathrm{d}\varphi=R_X(\tau).$$

注意到周期性，有

$$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}S(t+\theta)S(t+\theta+\tau)\mathrm{d}t$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{2T}{T_0}\int_0^{T_0}S(t+\theta)S(t+\theta+\tau)\mathrm{d}t$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T_0}\int_t^{t+T_0}S(\varphi)S(\varphi+\tau)\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}S(\varphi)S(\varphi+\tau)\mathrm{d}\varphi,$$

故依定义知，随机相位周期过程是各态历经的.

例 3 设有随机过程 $X(t)=A\sin(2\pi\Theta_1 t+\Theta_2)$，其中 A 是常数，Θ_1 与 Θ_2 是相互独立的随机变量，Θ_1 的概率密度函数为偶函数，Θ_2 在 $[-\pi,\pi]$ 上均匀分布. 证明：

(1) $X(t)$是宽平稳过程；

(2) $X(t)$的均值是各态历经的.

证 (1)因为 $E[g(\Theta_1,\Theta_2)]=E\{E[g(\Theta_1,\Theta_2)|\Theta_1]\}$，故

$$m_X(t)=E[A\sin(2\pi\Theta_1 t+\Theta_2)]$$
$$=AE\{E[\sin 2\pi\Theta_1 t\cos\Theta_2+\cos 2\pi\Theta_1 t\sin\Theta_2)\mid\Theta_1]\}$$
$$=AE\{\sin 2\pi\Theta_1 tE[\cos\Theta_2]+\cos 2\pi\Theta_1 tE[\sin\Theta_2]\}$$
$$=0,$$

$$R_X(t_1,t_2)=E\{A\sin(2\pi\Theta_1 t_1+\Theta_2)\cdot A\sin(2\pi\Theta_1 t_2+\Theta_2)\}$$
$$=\frac{A^2}{2}E\{E[\cos 2\pi\Theta_1(t_1-t_2)$$
$$-\cos(2\pi\Theta_1(t_1+t_2)+2\Theta_2)\mid\Theta_1]\}$$
$$=\frac{A^2}{2}E[\cos 2\pi\Theta_1(t_1-t_2)]$$

$$= A^2\int_0^{\infty}\cos 2\pi\theta_1(t_1-t_2)f_{\theta_1}(\theta_1)\mathrm{d}\theta_1 = R_X(\tau),$$

$$\tau = t_1 - t_2,$$

所以依定义知，$X(t)$是宽平稳过程.

(2) $\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}X(t)\mathrm{d}t$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\sin(2\pi\theta_1 t+\theta_2)\mathrm{d}t = 0 = m_X(t),$$

所以 $X(t)$的均值是各态历经的.

也可以直接由定义证明 $X(t)$是宽平稳过程.

因为 $f(\theta_1,\theta_2)=f_1(\theta_1)f_2(\theta_2)$，所以

$$m_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A\sin(2\pi\theta_1 t+\theta_2)f_1(\theta_1)f_2(\theta_2)\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2$$

$$= A\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi\theta_1 t+\theta_2)\mathrm{d}\theta_2\right]f_1(\theta_1)\mathrm{d}\theta_1$$

$$= 0,$$

$$R_X(t_1,t_2)= A^2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\{\cos 2\pi\theta_1(t_1-t_2)\right.$$

$$\left.-\cos[2\pi\theta_1(t_1+t_2)+2\theta_2]\}\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta\right]f_1(\theta_1)\mathrm{d}\theta_1$$

$$= A^2\int_0^{\infty}\cos 2\pi\theta_1(t_1-t_2)f_1(\theta_1)\mathrm{d}\theta_1$$

$$= R_X(\tau),\quad \tau = t_1 - t_2.$$

例 4 设$\{X(t),\ t\in(-\infty,\infty)\}$是一个随机过程，$X(t)=Y$，$Y$是一个非退化(单点分布)的随机变量，讨论 $X(t)$的各态历经性.

解 $X(t)$是平稳过程是显然的，其均值与相关函数都是常数. 但是

$$\langle X(t)\rangle = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\mathrm{d}t = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}Y\mathrm{d}t = Y.$$

由于Y不是常数，故不可能与$E[Y]$相等. 从而知 $X(t)$的均值不具有各态历经性，所以 $X(t)$不是各态历经的.

例 5 设$\{X(t), t\in(-\infty,\infty)\}$是随机过程，$X(t)=a\cos(\omega t+\Phi)$，其中$a,\omega$是实常数，$\Phi$服从$(0,2\pi)$上的均匀分布，验证$X(t)$具有各态历经性.

证
$$E[X(t)] = E[a\cos(\omega t+\Phi)] = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0,$$

$$E[X(t)\overline{X(t+\tau)}] = \int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2\pi}\cos(\omega t+\varphi)\cos(\omega t+\omega\tau+\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}\cos\omega\tau = R_X(\tau),$$

所以$X(t)$是均方连续的实平稳过程. 于是

$$\begin{aligned}\langle X(t)\rangle &= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t\\ &= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{a}{2T}\frac{\sin(\omega T+\varphi)-\sin(-\omega T+\varphi)}{\omega}\\ &= 0 = E[X(t)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle X(t)X(t+\tau)\rangle &= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a^2\cos(\omega t+\varphi)\cos(\omega t+\omega\tau+\varphi)\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{a^2}{2}\cos\omega t = E[X(t)\overline{X(t+\tau)}].\end{aligned}$$

故$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$是各态历经的.

例 6 讨论随机电报信号(见上节例 10)过程的均值的各态历经性.

解 由上节例 10 知，随机电报信号过程的相关函数为$R_X(\tau)=\mathrm{e}^{-2\lambda|\tau|}$. 又因为$E[X(t)]=0$，所以

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R_X(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)\mathrm{e}^{-2\lambda|\tau|}\mathrm{d}\tau\\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\lambda T}\left(1-\frac{1-\mathrm{e}^{4\lambda T}}{4\lambda T}\right) = 0,\end{aligned}$$

故随机电报信号过程的均值是各态历经的.

例 7 设随机过程 $X(t)=A\sin\lambda t+B\cos\lambda t$，其中 A,B 是均值为零、方差为 σ^2 的相互独立的正态随机变量. 问：$X(t)$的均值和均方值是否具有各态历经性？若 $A=-\sqrt{2}\sigma\sin\Phi, B=\sqrt{2}\sigma\cos\Phi$，$\Phi$ 是在$(0,2\pi)$内服从均匀分布的随机变量，此时 $E[X^2(t)]$是否是各态历经的？

解 因为，由题设 $A\sim N(0,\sigma^2), B\sim N(0,\sigma^2)$，故

$$
\begin{aligned}
E[X(t)] &= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[A\sin\lambda t+B\cos\lambda t]\,\mathrm{d}t \\
&= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ \frac{1}{T}\int_{0}^{T}B\cos\lambda t\,\mathrm{d}t = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ \frac{\sin\lambda T}{\lambda T}B,
\end{aligned}
$$

而 $$\lim_{T\to\infty}E\left[\left|\frac{\sin\lambda T}{\lambda T}B-0\right|^2\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{\sin^2\lambda T}{(\lambda T)^2}E(B^2)=0,$$

知$\dfrac{\sin\lambda T}{\lambda T}B$ 均方收敛于零，故 $X(t)$的均值是各态历经的.

$$E[X^2(t)]=E[A^2\sin^2\lambda t+B^2\cos^2\lambda t+2AB\sin\lambda t\cos\lambda t]=\sigma^2,$$

$$
\begin{aligned}
\langle X^2(t)\rangle &= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(A^2\sin^2\lambda t+B^2\cos^2\lambda t+2AB\sin\lambda t\cos\lambda t)\,\mathrm{d}t \\
&= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\frac{A^2+B^2}{2}+\frac{B^2-A^2}{2}\cos 2\lambda t+AB\sin 2\lambda t\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{A^2+B^2}{2}.
\end{aligned}
$$

因为 $$\frac{A^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1),\ D\left[\frac{A^2}{\sigma^2}\right]=2,\ D[A^2]=2\sigma^4,$$

所以

$$E\left[\frac{1}{2}(A^2+B^2)\right]=\frac{1}{2}\{E[A^2]+E[B^2]\}=\sigma^2,$$

$$D\left[\frac{1}{2}(A^2+B^2)\right]=\frac{1}{4}\{D[A^2]+D[B^2]\}=\sigma^4\neq 0.$$

从而知 $X(t)$ 的均方值 $E[X^2(t)]$ 不是各态历经的.

例 8 设平稳过程 $X(t)$ 的相关函数为 $R_X(\tau)$，证明：

$$P\{|X(t+\tau)-X(t)|\geqslant a\}\leqslant 2[R_X(0)-R_X(\tau)]/a^2.$$

证 由概率论中的契比雪夫不等式，有

$$P\{|X(t+\tau)-X(t)|\geqslant a\}$$
$$\leqslant\frac{E[|X(t+\tau)-X(t)|^2]}{a^2}=\frac{2[R_X(0)-R_X(\tau)]}{a^2}.$$

例 9 设 $X(t)$ 是平稳过程，其相关函数 $R_X(\tau_0)$ 是以 T_0 为周期的函数，证明：$X(t)$ 是周期为 T_0 的平稳过程.

证 由题设知 $R_X(\tau_0)=R_X(\tau_0+T_0)$，又由平稳性知 $E[X(t)-X(t+T_0)]=0$. 根据方差的性质，条件 $P\{X(t+T_0)=X(t)\}=1$ 与 $E\{[X(t+T_0)-X(t)]^2\}=0$ 等价. 而

$$E\{[X(t+T_0)-X(t)]^2\}$$
$$=E\{[X(t+T_0)]^2\}-2E[X(t+T_0)X(t)]+E\{[X(t)]^2\}$$
$$=R_X(0)-2R_X(T_0)+R_X(0)$$
$$=2[R_X(0)-R_X(T_0)]=0,$$

所以 $X(t)$ 是周期为 T_0 的平稳过程.

例 10 设 $X(t)$ 是雷达的发射信号，遇目标后返回接收机的微弱信号是 $aX(t-\tau_1)$，$a\ll 1$，τ_1 是信号返回时间. 由于接收的信号总是伴有噪声的，记噪声为 $N(t)$，于是接收到的全信号是 $Y(t)=aX(t-\tau_1)+N(t)$.

(1)若 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 是联合平稳过程，求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$；

(2)在题(1)的条件下，设 $N(t)$ 的均值为零且与 $X(t)$ 相互独立，求 $R_{XY}(\tau)$（这是利用互相关函数从全信号中检测小信号的相关接收法）.

解 (1) $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的互相关函数为

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$

$$= E\{X(t)[aX(t+\tau-\tau_1)+N(t+\tau)]\}$$
$$= E[X(t)aX(t+\tau-\tau_1)]+E[X(t)N(t+\tau)]$$
$$= aR_X(\tau-\tau_1)+R_{XN}(\tau).$$

(2)由题设 $E[N(t)]=0$ 且与 $X(t)$ 独立，则

$$C_{XN}(t,t+\tau)= E\{[X(t)-m_X(t)][N(t+\tau)-m_N(t+\tau)]\}$$
$$= E[X(t)N(t+\tau)]-m_X(t)E[N(t+\tau)]$$
$$= R_{XN}(\tau)=0,$$

所以 $\qquad R_{XY}(\tau)=aR_X(\tau-\tau_1)+R_{XN}(\tau)=aR_X(\tau-\tau_1).$

例 11 设 $X(t)$ 是一随机相位周期过程，图 6.1 表示其一个样本函数 $x(t)$. 周期 T 与振幅 A 均为常数，相位是在 $(0,T)$ 上服从均匀分布的随机变量. 求 m_X, $E[X^2(t)]$, σ_X^2 和 $\langle X(t)\rangle$, $\langle X^2(t)\rangle$.

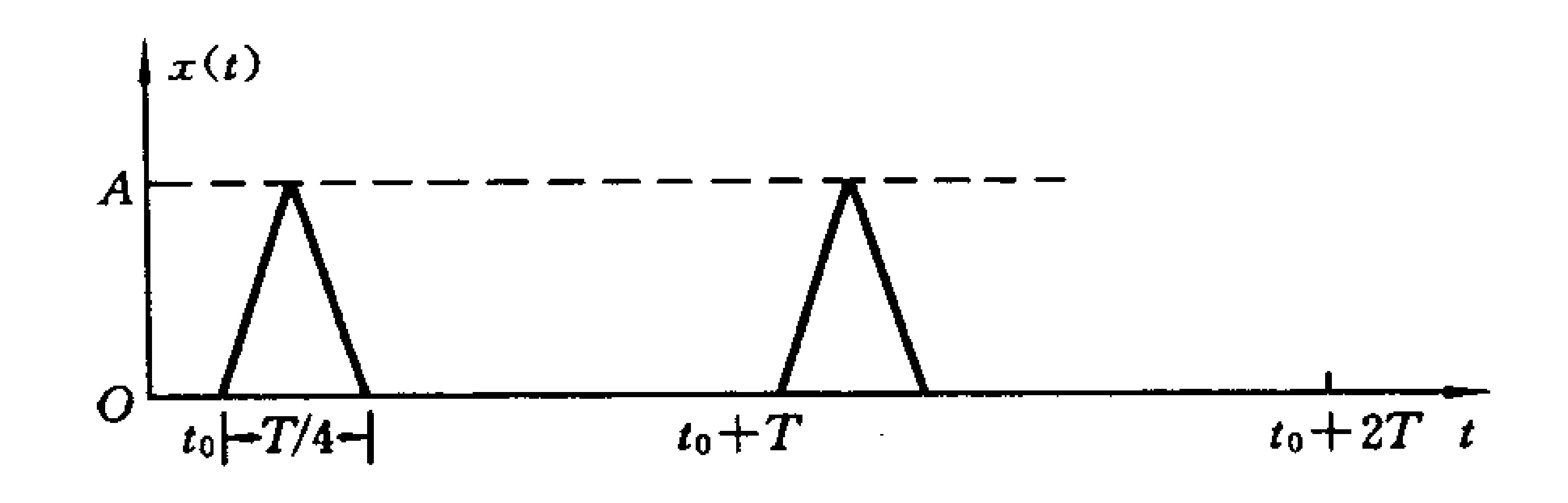


图 6.1

解 依图 6.1，得

$$X(t)=\begin{cases}8A(t-t_0)/T, & t_0\leqslant t<t_0+T/8,\\ -8A(t-t_0-T/4)/T, & t_0+T/8\leqslant t<t_0+T/4,\\ 0, & t_0+T/4\leqslant t<t_0+T,\end{cases}$$

令 $t-t_0=u$，则 $X(t)=S(t-t_0)$，

$$m_X=E[X(t)]=\int_0^T\frac{1}{T}S(t-t_0)\mathrm{d}t_0=\frac{-1}{T}\int_t^{t-T}S(u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_{t-T}^{t}\frac{1}{T}S(u)\mathrm{d}u=\int_0^T\frac{1}{T}S(u)\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{T}\Big[\int_0^{T/8}\frac{8A}{T}u\,\mathrm{d}u+\int_{T/8}^{T/4}-\frac{8A}{T}\Big(u-\frac{T}{4}\Big)\mathrm{d}u\Big]=\frac{A}{8},$$

$$E[X^2(t)]=\int_0^T \frac{1}{T}S(t-t_0)S(t-t_0)\mathrm{d}t=\int_0^T S^2(u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{T}\left\{\int_0^{T/8}\left(\frac{8A}{T}u\right)^2\mathrm{d}u+\int_{T/8}^{T/4}\left[-\frac{8A}{T}\left(u-\frac{T}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}u\right\}$$

$$=\frac{A^2}{12}.$$

从而
$$\sigma_X^2=\frac{A^2}{12}-\left(\frac{A}{8}\right)^2=\frac{13}{192}A^2,$$

$$\langle X(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T_1}\frac{2T_1}{T}\int_0^{T_1}S(t-t_0)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}S(t-t_0)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T S(u)\mathrm{d}u=\frac{A}{8},$$

$$\langle X^2(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T_1}\int_{-T_1}^{T_1}S^2(t-t_0)\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T_1}\frac{2T_1}{T}\int_0^T S(t-t_0)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}S^2(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{T}\int_0^T S^2(u)\mathrm{d}u=\frac{A^2}{12}.$$

例 12 设 $X_T=\{X(t),\ t\in(-\infty,\infty)\}$ 是实平稳过程，讨论 $\{X^2(t),t\in(-\infty,\infty)\}$ 的均值的各态历经性.

解 令
$$Y(t)=X^2(t)-R_X(0),$$
则
$$E[Y(t)]=E[X^2(t)]-R_X(0)=0,$$
$$R_Y(\tau)=E[Y(t+\tau)Y(t)]=2R_X^2(\tau).$$
若记 $F_X(\omega)$ 为 X_T 的谱函数，则

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^T D[Y_T(\tau)]\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2T}\int_{-T}^T R_Y(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2T}\int_{-T}^T 2R_X^2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T}^T\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau\omega}\mathrm{d}F_X(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau\mu}\mathrm{d}F_X(\mu)}\right]\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T}^T\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau(\omega-\mu)}\mathrm{d}F_X(\omega)\mathrm{d}F_X(\mu)\right]\mathrm{d}\tau$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_T(\omega - \mu)\mathrm{d}F_X(\omega)\mathrm{d}F_X(\mu),$$

其中
$$\psi_T(\omega-\mu)=\begin{cases}\dfrac{\sin T(\omega-\mu)}{T(\omega-\mu)}, & \omega\neq\mu,\\ 1, & \omega=\mu.\end{cases}$$

所以
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}D[Y_T(\tau)]\mathrm{d}\tau$$
$$= \lim_{T\to\infty}2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_T(\omega - \mu)\mathrm{d}F_X(\omega)\mathrm{d}F_X(\mu)$$
$$= 2\sum_i[F_X(\omega_i) - F_X(\omega_i - 0)].$$

最后一个等式是因为由 $F_X(\omega)$的单调不减性,其间断点至多有可数多个. $\{\lambda_i\}$表示 F_X 的跳跃点的全体,因为

$$\lim_{T\to\infty}E\left[\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[X^2(t) - R_X(0)]\mathrm{d}t\right|^2\right] = 0$$

的充要条件是 Y_T 的谱函数连续,这时, $\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}R_X^2(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$.
由 $Y(t)=X^2(t)-R_X(0)$知,这也就是$\{X^2(t)\}$的数学期望具有各态历经性的充要条件.

第七章　平稳过程的谱分析

第一节　平稳过程的谱密度

主要内容

一、平稳过程的谱函数与谱密度

1. **维纳-辛钦定理**　均方连续的平稳过程 $\{X(t), t \in (-\infty, \infty)\}$ 的相关函数 $R_X(\tau)$ 可表示为

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\tau\omega} dF_X(\omega), \quad \tau \in (-\infty, \infty),$$

其中 $F_X(\omega)$ 是单调不减的有界函数，且 $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 2\pi R_X(0)$.

$F_X(\omega)$ 称为平稳过程 $\{X(t)\}$ 的**谱函数**.

2. 若 $R_X(n)$ 为平稳随机序列 $\{X(n), n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 的相关函数，则

$$R_X(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{jn\omega} dF_X(\omega),$$

其中 $F_X(\omega)$ 是一个在 $[-\pi, \pi]$ 上单调不减的有界函数，且有 $F(-\pi) = 0, F(\pi) = 2\pi R_X(0)$.

3. 若 $F(\omega)$ 可微，则 $F'(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega} = S_X(\omega)$. 称 $S_X(\omega)$ 为相应平稳过程或平稳随机序列的**谱密度**.

若 $S_X(\omega)$ 存在，则有

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau\omega}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega, \qquad ①$$

$$R_X(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau\omega}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

由式①知，$R_X(\tau)$ 是 $S_X(\omega)$ 的傅里叶逆变换. 如果 $R_X(\tau)$ 绝对可积，则 $S_X(\omega)$ 是 $R_X(\tau)$ 的傅里叶变换，即

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau,\quad S_X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_X(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}.$$

故 $R_X(\tau)$ 与 $S_X(\omega)$ 是一个**傅里叶变换对**.

因为 $R_X(\tau)=R_X(-\tau)$，所以又有

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\tau\omega R_X(\tau)\mathrm{d}\tau=2\int_{0}^{\infty}R_X(\tau)\cos\tau\omega\mathrm{d}\tau.$$

4. 设 $\{Y(\omega),\omega\in(-\infty,\infty)\}$ 是一个正交增量过程，且满足下列条件：

(1) $E[Y(\omega)]=0, -\infty<\omega<\infty$,

(2) 对任意两个不相重叠的区间 $[\omega_1,\omega_2)$, $[\omega_3,\omega_4)$ 有 $E\{[Y(\omega_2)-Y(\omega_1)]\overline{[Y(\omega_4)-Y(\omega_3)]}\}=0$.

(3) $E[|Y(\omega_2)-Y(\omega_1)|^2]=\frac{1}{2}[F_X(\omega_2)-F_X(\omega_1)],$

$$-\infty<\omega<\infty,$$

其中 $F_X(\omega)$ 是一个单调不减的有界函数，则

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}t\omega}\mathrm{d}Y(\omega),\quad t\in(-\infty,\infty)$$

是一个平稳过程，且谱函数即为 $F_X(\omega)$.

5. **平稳过程的谱分解定理** 设 $\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$ 是均方连续平稳过程，且 $E[X(t)]=0$，则必存在一个正交增量过程 $Y(\omega)$，使得

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}t\omega}\mathrm{d}Y(\omega),$$

$$Y(\omega)=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}-1}{-\mathrm{j}t}X(t)\mathrm{d}t,$$

且满足第 4 点的三个条件(其中 $F_X(\omega)$ 是 $X(t)$ 的谱函数).

6. 设$\{X(n),n=0,\pm 1,\cdots\}$是平稳随机序列,且 $E[X(n)]=0$,则必存在一个正交增量过程 $Y(\omega)$,使得

$$X(n)=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\mathrm{d}Y(\omega),$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\omega X(0)-\sum_{n=0}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}X(n)}{\mathrm{j}n}\right],\quad -\pi\leqslant\omega\leqslant\pi,$$

且满足第 4 点中的三个条件(在条件(3) 中,$-\pi\leqslant\omega_1<\omega_2\leqslant\pi$).

第 5 点和第 6 点中的$\{Y(\omega),\omega\in(-\infty,\infty)\}$ 和$\{Y(\omega),\omega\in[-\pi,\pi]\}$ 称为 $X(t)$ 和 $X(n)$ 的随机谱函数. 平稳过程 $X(t)$ 和 $X(n)$ 的表达式称为**平稳过程的谱分解式**.

二、平稳过程的功率谱密度

1. 设有时间函数 $x(t)(-\infty<t<\infty)$ 满足狄里赫利条件,且绝对可积,即$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\mathrm{d}t<\infty$,则 $x(t)$ 的傅里叶变换存在,即

$$F_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t.$$

其逆变换为 $$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_x(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

一般地,有

$$F_x(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\overline{F_x(\omega)}.$$

2. 公式 $$\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_x(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

称为**巴塞瓦(Parseval)公式**. 等式左边表示 $x(t)$ 在$(-\infty,\infty)$ 上的**总能量**,而等式右边的 $|F_x(\omega)|^2$ 称为**能量谱密度**。

3. 对于一般函数,取

$$x_T(t)=\begin{cases}x(t), & |t|\leqslant T,\\ 0, & |t|>T.\end{cases}$$

则 $$F_x(\omega,T)=\int_{-T}^{T}x_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t,$$

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega, T)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

有 $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\mid F_x(\omega,T)\mid^2\mathrm{d}\omega.$$

等式左边称为**平均功率的谱**表示式，右边的被积式称为函数 $x(t)$ 在 ω 处的**平均功率谱密度**，简称**功率谱密度**，记为

$$S_x(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\mid F_x(\omega,T)\mid^2.$$

4. 设 $\{X(t), t\in(-\infty,\infty)\}$ 是均方连续的随机过程，则称

$$\psi_X^2 = \lim_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)\mathrm{d}t\right]$$

是 $X(t)$ 的平均功率，称

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[\mid F_X(\omega,T)\mid^2]$$

是 $X(t)$ 的**功率谱密度**，简称为**谱密度**.

当 $X(t)$ 是均方连续的平稳过程时，有

$$\psi_X^2 = \lim_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)\mathrm{d}t\right] = E[X^2(t)] = R_X(0),$$

$$\psi_X{}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

5. 设 $\{X(n), n=0,\pm1,\cdots\}$ 是平稳随机序列，若相关函数满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mid R_X(n)\mid<\infty$，则称

$$S_X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}R_X(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega},\quad -\pi\leqslant\omega\leqslant\pi$$

是 $\{x_n, n=0,\pm1,\cdots\}$ 的谱密度.

疑 难 解 析

怎样理解平稳随机过程的谱分析？

答 对于周期的时间函数 $x(t)$，如果满足狄里赫利条件，可以进行傅里叶变换，即有

$$F_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t,$$

其逆变换为 $$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

当 $x(t)$ 是非周期函数时，可以任意 $T>0$ 截取 $x(t)$ 的一段，得

$$x_T(t)=\begin{cases}x(t), & |t|\leqslant T,\\ 0, & t>T.\end{cases}$$

显然，$T\to\infty$ 时，$x_T(t)=x(t)$. 所以

$$x(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}F_X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

巴塞瓦公式 $\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_X(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$ 可理解为总能量的谱表示式，对非周期函数情形，有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2\mathrm{d}\omega.$$

对于平稳随机过程 $\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$ 的每一个 $t\in(-\infty,\infty)$，都有以上的等式成立(只要 $X(t)$ 是均方连续的，必定均方可积，但不一定绝对可积). 取等式的期望值，即有

$$\lim_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)\mathrm{d}t\right]=\lim_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{4\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}|F_X(\omega,T)|^2\mathrm{d}\omega\right].$$

令等式的左边为 ψ_X^2，则称

$$\psi_X^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)\mathrm{d}t$$

是均方连续的平稳过程 $\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$ 的平均功率，它是 $X(t)$ 的均方值. 等式右边可以写成 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_X(\omega,T)|^2\mathrm{d}\omega$，令被积函数为 $S_X(\omega)$，则

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_X(\omega,T)|^2$$

称为均方连续的平稳过程 $\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$ 在 ω 处的功率谱

密度,简称谱密度. 于是

$$\psi_X^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\mathrm{d}\omega$$

表示均方连续平稳过程 $X(t)$ 的平均功率等于 $X(t)$ 的均方值,可由谱密度在全频率域上积分得到。

功率谱密度 $S_X(\omega)$ 是一个频率函数,从频率域来描绘 $X(t)$ 的统计规律的数字特征. 而 $X(t)$ 是各种频率简谐波的叠加,$S_X(\omega)$ 就反映了各种频率成分所具有的能量的大小.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2},$$

求 $X(t)$ 的均方值.

解 依维纳-辛钦公式,$X(t)$的均方值为

$$\psi_X^2 = R_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega 0}\frac{\omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\omega^2 + 2} - \frac{1}{\omega^2 + 1}\right)\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\sqrt{2}\arctan\frac{\omega}{\sqrt{2}} - \arctan\omega\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

例 2 设$\{Y(n), n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 是实随机变量序列,$\{C_n\}$ 是满足 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 < \infty$ 的复数序列,$Y_n = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n X(n-k)$ 是一个复宽平稳时间序列. $\{X(n), n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 是实的互不相关随机变量序列,且 $E[X(n)] = 0, D[X(n)] = \sigma^2$,求 $Y(n)$ 的谱密度.

解 因为 $\quad R_Y(n) = \sigma^2\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} C_{n+k}\bar{C}_k,$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|R_Y(n)|=\sigma^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{n+k}\bar{C}_k\right|\leqslant\sigma^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_{n+k}||\bar{C}_k|$$

$$=\sigma^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}|C_l||\bar{C}_k|=\sigma^2\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_k|\right)^2<\infty,$$

所以存在谱密度，且

$$S_Y(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_Y(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}=\sigma^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{n+k}C_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}$$

$$=\sigma^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{n+k}C_k=\sigma^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}C_l\mathrm{e}^{-\mathrm{j}l\omega}C_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega}$$

$$=\sigma^2\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega}\right|^2,\quad -\infty<\omega<\infty.$$

例 3 设平稳过程 $X(t)$ 的谱密度是 $S_X(\omega)$，证明：$Y(t)=X(t)+X(t-T)$ 的谱密度是

$$S_Y(\omega)=2S_X(\omega)(1+\cos\omega T).$$

证 依相关函数的定义，有

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E[Y(t)Y(t+\tau)]\\&=E\{[X(t)+X(t-T)][X(t+\tau)+X(t+\tau-T)]\}\\&=E[X(t)X(t+\tau)]+E[X(t-T)X(t+\tau)]\\&\quad+E[X(t)X(t+\tau-T)]\\&\quad+E[X(t-T)X(t-T+\tau)]\\&=2R_X(\tau)+R_X(\tau-T)+R_X(\tau+T).\end{aligned}$$

依维纳-辛钦定理，得

$$\begin{aligned}S_Y(\omega)&=2S_X(\omega)+S_X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+S_X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\\&=2S_X(\omega)(1+\cos\omega T).\end{aligned}$$

由于 $R_Y(\tau)$ 与 $S_Y(\omega)$ 是傅里叶变换对，因此要用到傅里叶变换的一些性质. 希望读者能对积分变换中的傅里叶变换有所了解.

例 4 已知平稳过程 $X(t)$ 的相关函数为

$$R_X(\tau)=4\mathrm{e}^{-|\tau|}\cos\pi\tau+\sin3\pi\tau,$$

求谱密度 $S_X(\omega)$.

解 由积分变换知，$f(t)=a\cos\omega_0t$ 时，傅里叶变换 $F(\omega)=$

$a\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$,所以,依维纳-辛钦公式,$X(t)$的谱密度为

$$S_X(\omega)=2\int_0^{\infty}4\mathrm{e}^{-\tau}\cos\pi\tau\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau+\pi[\delta(\omega+3\pi)+\delta(\omega-3\pi)]$$

$$=4\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau}[\cos(\pi+\omega)\tau+\cos(\pi-\omega)\tau]\mathrm{d}\tau$$

$$+\pi[\delta(\omega+3\pi)+\delta(\omega-3\pi)].$$

因为 $$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos at\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{t}\cos at\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\sin at\mathrm{d}t$$

$$=1+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}a\sin at\mathrm{d}t$$

$$=1-\mathrm{e}^{-t}a\sin at\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}-\mathrm{e}^{-t}a^2\cos at\mathrm{d}t,$$

所以 $$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos at\mathrm{d}t=1-a^2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos at\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos at\mathrm{d}t=\frac{1}{1+a^2}.$$

于是 $$S_X(\omega)=4\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau}[\cos(\pi+\omega)\tau+\cos(\pi-\omega)\tau]$$

$$+\pi[\delta(\omega+3\pi)+\delta(\omega-3\pi)]$$

$$=4\left(\frac{1}{(\pi+\omega)^2+1}+\frac{1}{(\pi-\omega)^2+1}\right)$$

$$+\pi[\delta(\omega+3\pi)+\delta(\omega-3\pi)].$$

在利用傅里叶变换计算积分时,因为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}=\cos\omega t-\mathrm{j}\sin\omega t$,而 $\cos\omega t$ 为偶函数,$\sin\omega t$ 为奇函数,所以在对称区间上求积时特别要注意被积函数的奇偶性,简化积分计算.

例 5 设 $X(t)$ 为一平稳随机过程,若对应于某一个 $T\neq 0$,$X(t)$ 的相关函数 $R_X(T)=R_X(0)$. 证明:$R_X(\tau)$ 必为以 T 为周期的周期函数.

证 因为 $$R_X(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega,$$

$$R_X(T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)e^{j\omega t}d\omega,$$

所以 $R_X(T)-R_X(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos\omega T)S_X(\omega)d\omega=0.$

又有 $(1-\cos\omega T)S_X(\omega)\geqslant 0\Rightarrow(1-\cos\omega T)S_X(\omega)=0,$

于是 $$S_X(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}S_X(\omega_k)\delta(\omega-\omega_k),\quad \omega_k=\frac{2k\pi}{T},$$

故 $$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}S_X(\omega_k)e^{j\omega_k\tau}.$$

可知，$R_X(\tau)$ 是以 T 为周期的周期函数.

例 6 已知随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的谱密度

$$S_X(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9},\qquad S_Y(\omega)=\frac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2},$$

求 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的相关函数和均方值.

解 $$S_X(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}=\frac{3}{8}\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{5}{8}\frac{1}{\omega^2+9},$$

$$S_Y(\omega)=\frac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2}=\frac{-1}{\omega^2+1}+\frac{2}{\omega^2+2},$$

依照维纳-辛钦定理，有

$$\begin{aligned}R_X(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{5}{8}\frac{1}{\omega^2+9}\right)e^{j\omega\tau}d\omega\\&=\frac{3}{16}e^{-|\tau|}+\frac{5}{48}e^{-3|\tau|},\end{aligned}$$

于是 $$\sigma_X^2=R_X(0)=\frac{3}{16}+\frac{5}{48}=\frac{7}{24},$$

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{-1}{\omega^2+1}+\frac{2}{\omega^2+2}\right)e^{j\omega\tau}d\omega\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}|\tau|}-\frac{1}{2}e^{-|\tau|};\end{aligned}$$

$$\sigma_Y^2 = R_Y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1).$$

在本例中，积分可通过直接计算得到，也可通过查傅里叶变换的积分表得到.

例 7 设 $S_X(\omega)$ 是一个随机过程的功率谱密度，证明：$\frac{d^2}{d\omega^2}S_X(\omega)$ 不可能是功率谱密度.

证 依相关函数性质知 $|R_X(0)| \geqslant |R_X(\tau)|$. 又设 $S_{X_1}(\omega) = \frac{d^2}{d\omega^2}S_X(\omega)$，由于 $S_{X_1}(\omega)$ 与 $R_{X_1}(\omega)$ 构成一个傅里叶变换对，所以，依傅里叶变换的微分性质有

$$R_{X_1}(\tau) = -\tau^2 R_X(\tau).$$

若对应于某一个 $\tau_1 \neq 0$，有 $R_X(\tau_1) \neq 0$，则有 $|R_{X_1}(0)| < |R_{X_1}(\tau_1)|$，即 $R_{X_1}(\tau)$ 不可能是相关函数，从而，$S_{X_1}(\omega) = \frac{d^2}{d\omega^2}S_X(\omega)$ 不可能是功率谱密度.

例 8 设 $Z(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{j\omega_i t}$，其中 $\omega_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 是常数，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互不相关的随机变量，且 $E[A_i] = 0, E[A_i^2] = \sigma^2 (i = 1,2,\cdots,n)$，求 $Z(t)$ 的相关函数与谱密度.

解 依定义，相关函数为

$$\begin{aligned} R_X(t, t+\tau) &= E[Z(t)\overline{Z(t+\tau)}] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{n} A_i e^{j\omega_i t} \sum_{k=1}^{n} A_k e^{-j\omega_k (t+\tau)}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} E[A_k^2 e^{-j\omega_k (t+\tau)}] = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 e^{-j\omega_i \tau}. \end{aligned}$$

依照维纳-辛钦定理，有

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 e^{-j\omega_i \tau} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_i)\tau} d\tau = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \delta(\omega+\omega_i).$$

例 9 已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度是

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 8\delta(\omega) + 20(1 - |\omega|/10), & |\omega| < 10, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

求 $X(t)$ 的相关函数.

解 依定义,有

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 8\delta(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^{10} 20\left(1 - \frac{|\omega|}{10}\right)\cos\omega\tau d\omega$$

$$= \frac{4}{\pi} + \frac{20}{\pi}\left[\int_0^{10} \cos\omega\tau d\omega - \int_0^{10} \frac{\omega}{10}\cos\omega\tau d\omega\right]$$

$$= \frac{4}{\pi} + \frac{20}{\pi}\left[\frac{1}{\tau}\sin\omega\tau\Big|_0^{10} - \frac{\omega}{10\tau}\sin\omega\tau\Big|_0^{10} + \int_0^{10} \frac{\sin\omega\tau}{10\tau} d\omega\right]$$

$$= \frac{4}{\pi} + \frac{20}{\pi}\left[-\frac{1}{10\tau^2}\cos\omega\tau\Big|_0^{10}\right] = \frac{4}{\pi}\left[1 - \frac{\cos 10\tau - 1}{2\tau^2}\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{\sin^2 5\tau}{10\tau^2}\right).$$

例 10 设随机过程 $X(t) = A\cos(\Omega t + \Theta)$,其中 A 为常数,Ω 和 Θ 是相互独立的随机变量,且 Θ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内服从均匀分布,Ω 的一维概率密度为偶函数,即 $f_\Omega(\omega) = f_\Omega(-\omega)$. 证明:$X(t)$ 的谱密度是 $S_X(\omega) = \pi a^2 f_\Omega(\omega)$.

证 依相关函数定义,有

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)]$$

$$= E\{a^2\cos(\Omega t + \Theta)\cos[\Omega(t-\tau) + \Theta]\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} a^2\cos(\omega t + \theta)\cos[\omega(t-\tau) + \theta]\,\frac{1}{2\pi} f_\Omega(\omega) d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2}\cos\omega\tau f_\Omega(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} a^2\cos\omega\tau f_\Omega(\omega) d\omega.$$

依照维纳-辛钦定理,有

$$
\begin{aligned}
S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} a^2 \cos\omega_1\tau f_\Omega(\omega_1) e^{-j\omega\tau} d\tau\, d\omega_1 \\
&= \frac{\pi a^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)] f_\Omega(\omega_1) d\omega_1 \\
&= \frac{\pi a^2}{2}[f_\Omega(\omega)+f_\Omega(-\omega)] = \pi a^2 f_\Omega(\omega),
\end{aligned}
$$

从而证得命题成立.

例 11 设 $X(t)$ 为一个随机电报波过程，它的一个样本函数如图 7.1 所示. 已知在任一时刻波形取 A 或 $-A$ 的概率相同，在时间间隔 τ 内波形变号的次数 n 服从参数为 λ 的泊松分布

$$
P(n,\lambda) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau},
$$

求 $X(t)$ 的相关函数与功率谱密度.

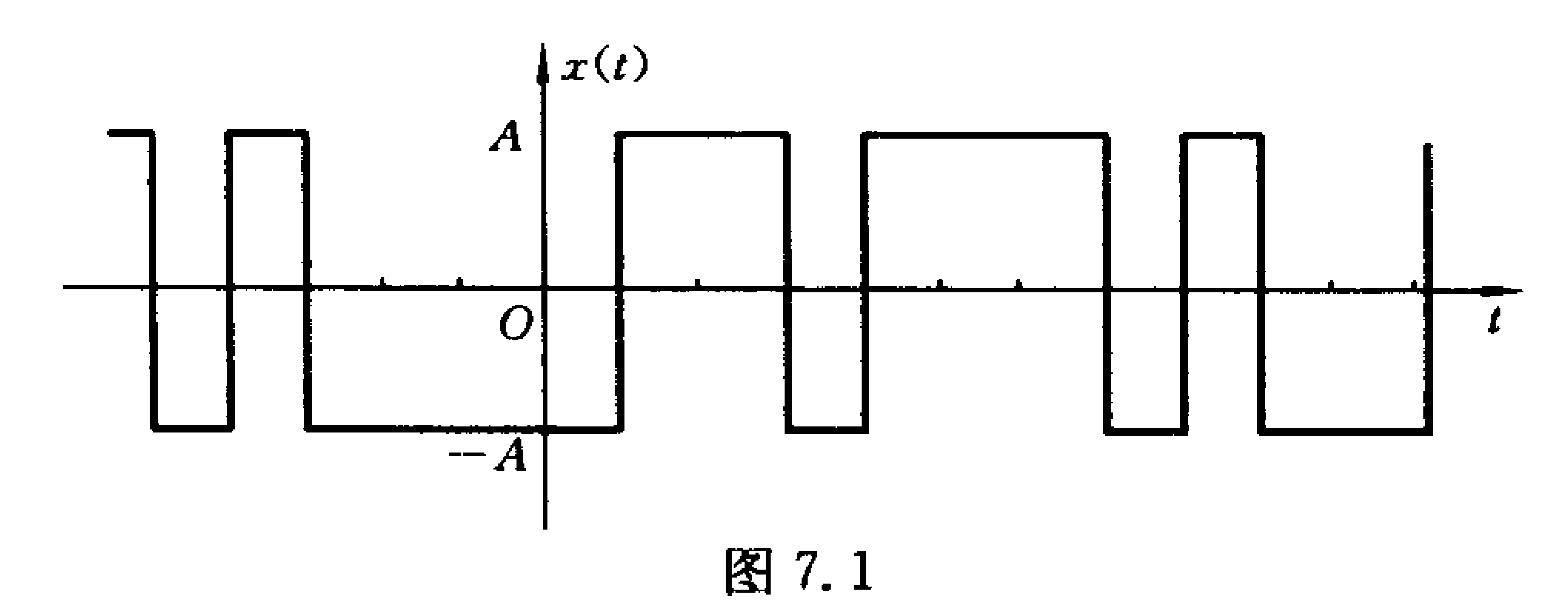


图 7.1

解 依相关函数定义

$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[X(t)X(t-\tau)] \\
&= A^2 P\{X(t-\tau) = X(t)\} + (-A^2)P\{X(t-\tau) = -X(t)\}
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
& P\{X(t-\tau) = X(t)\} \\
&= P\{n \text{ 为偶数}\} = \exp(-\lambda\tau)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!} \\
&= \exp(-\lambda\tau)\cosh(\lambda\tau),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& P\{X(t-\tau) = -X(t)\} \\
&= P\{n \text{ 为奇数}\} = \exp(-\lambda\tau)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \exp(-\lambda\tau)\sinh(\lambda\tau).
\end{aligned}
$$

代入 $R_X(\tau)$，可得

$$R_X(\tau) = A^2\exp(-\lambda\tau)[\cosh(\lambda\tau) - \sinh(\lambda\tau)] = A^2\exp(-2\lambda\tau).$$

由于 $R_X(\tau)$ 是偶函数，故

$$R_X(\tau) = A^2\exp(-2\lambda\mid\tau\mid).$$

由傅里叶变换对 $e^{-a|\tau|} \longleftrightarrow \dfrac{2a}{\omega^2 + a^2}$，得

$$S_X(\omega) = \frac{4\lambda A^2}{\omega^2 + 4\lambda^2}.$$

例 12 设 $X(t)$ 是一二元波过程，其一个样本函数如图 7.2 所示. 已知在每个单位长时间内波形取正、负值的概率各为 1/2，设在任一间隔内波形的取值与其它间隔内的取值无关，故图中有意不设定时轴的原点. 求 $X(t)$ 的相关函数与功率谱密度.

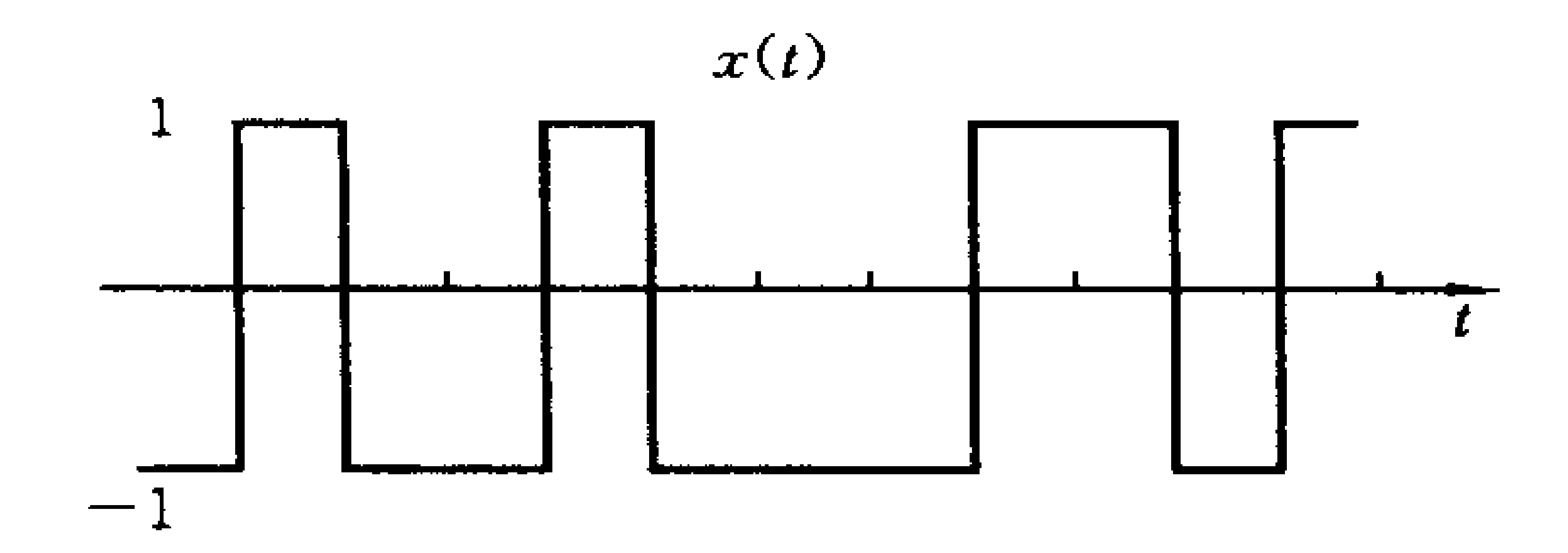


图 7.2

解 令 $X_1 = X(t_1)$，$X_2 = X(t_2)$，依相关函数定义，有

$$\begin{aligned}
R_X(t_1,t_2) = E[X_1X_2] &= 1\cdot 1\cdot P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} \\
&\quad + 1\cdot(-1)\cdot P\{X_1 = 1, X_2 = -1\} \\
&\quad + (-1)\cdot 1\cdot P\{X_1 = -1, X_2 = 1\} \\
&\quad + (-1)(-1)P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} \\
&= P\{X_1 = 1 \mid X_2 = 1\}P\{X_2 = 1\} \\
&\quad - P\{X_1 = 1 \mid X_2 = -1\}P\{X_2 = -1\} \\
&\quad - P\{X_1 = -1 \mid X_2 = 1\}P\{X_2 = 1\} \\
&\quad + P\{X_1 = -1 \mid X_2 = -1\}P\{X_2 = -1\},
\end{aligned}$$

已知 $P\{X_i=1\}=P\{X_i=-1\}=1/2,\ i=1,2,$

$$P\{X_1=-1 \mid X_2=1\}=1-P\{X_1=1 \mid X_2=1\},$$

$$P\{X_1=-1 \mid X_2=-1\}=1-P\{X_1=1 \mid X_2=-1\},$$

代入 $R_X(t_1,t_2)$，得

$$R_X(t_1,t_2)=\frac{1}{2}P\{X_1=1 \mid X_2=1\}-\frac{1}{2}P\{X_1=1 \mid X_2=-1\}$$

$$-\frac{1}{2}[1-P\{X_1=1 \mid X_2=1\}]$$

$$+\frac{1}{2}[1-P\{X_1=1 \mid X_2=-1\}].$$

当 $|t_2-t_1|>1$ 时，t_1 与 t_2 不在一个间隔内，X_1 与 X_2 相互独立，故

$$P\{X_1=1 \mid X_2=1\}=P\{X_1=1 \mid X_2=-1\}$$

$$=P\{X_1=1\}=1/2.$$

代入得

$$R_X(t_1,t_2)=0.$$

当 $|t_2-t_1|<1$ 时，概率 $P\{X_1=1 \mid X_2=-1\}$ 意味着"t_1 和 t_2 不在同一间隔内"和"X_1 与 X_2 取不同值"两个事件同时发生. 但由于 X_1 与 X_2 相互独立，则这一联合事件的概率应为两个事件分别发生的概率之积.

(1) 以 A 记"t_1 和 t_2 位于不同区间"的事件. 若 $|t_2-t_1|=0$，则 $P(A)=0$；若 $|t_2-t_1|=1$，则 $P(A)=1$；在区间 $(0,1)$ 内，$P(A)=|t_2-t_1|,\ |t_2-t_1|\leqslant 1$.

(2) 以 B 记"X_1 与 X_2 取不同值"事件，则 $P(B)=1/2$.

$$P\{X_1=1 \mid X_2=-1\}=P(A)P(B)$$

$$=\frac{1}{2}|t_2-t_1|,\quad |t_2-t_1|\leqslant 1.$$

$$P\{X_1=1\mid X_2=1\}=1-P\{X_1=-1\mid X_2=1\}$$
$$=1-\frac{1}{2}\mid t_2-t_1\mid,\ \mid t_2-t_1\mid\leqslant 1.$$

综合可得

$$R_X(\tau)=\begin{cases}1-|\tau|, & |\tau|\leqslant 1,\\ 0, & |\tau|>1,\end{cases}\quad \tau=t_2-t_1.$$

依维纳-辛钦公式，有

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$
$$=\int_{-1}^{1}(1-|\tau|)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2}.$$

例 13 设随机过程 $X(t)$ 的相关函数是 $R_X(\tau)$，功率谱密度 $S_X(\omega)=0$，$|\omega|>\omega_c$. 证明：

(1) $R_X(0)-R_X(\tau)\leqslant\frac{1}{2}R_X(0)\omega_c^2\tau^2$；

(2) $P\{|X(t+\tau)-X(t)|>\}\varepsilon\leqslant\{\omega_c^2\tau^2E[X^2(t)]\}/\varepsilon^2$，$\varepsilon>0$.

证 (1) 因为 $|\sin\omega\tau|\leqslant|\omega\tau|$，所以

$$1-\cos\omega\tau=2\sin^2(\omega\tau/2)\leqslant\omega^2\tau^2/2.$$

由题设条件，有

$$R_X(0)-R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}S_X(\omega)(1-\cos\omega\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}S_X(\omega)\frac{\omega^2\tau^2}{2}\mathrm{d}\omega$$
$$\leqslant\frac{\omega^2\tau^2}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{\omega_c^2\tau^2}{2}R_X(0).$$

故 $$R_X(0)-R_X(0)\leqslant\frac{1}{2}R_X(0)\omega_c^2\tau^2.$$

(2) 由契比雪夫不等式，有

$$P\{|X(t+\tau)-X(t)|>\varepsilon\}\leqslant\{E[|X(t+\tau)-X(t)|^2]\}/\varepsilon^2$$
$$=2[R_X(0)-R_X(\tau)]/\varepsilon^2.$$

利用题(1)的结果,即证得

$$P\{|X(t+\tau)-X(t)|>\varepsilon\}$$
$$\leqslant\{\omega_c^2\tau^2E[X^2(t)]\}/\varepsilon^2,\quad \varepsilon>0.$$

例 14 设随机过程 $X(t)$ 的相关函数是 $R_X(\tau)$,功率谱密度为 $S_X(\omega)=0$, $|\omega|>\omega_c$. 证明:对于 $|\tau|\leqslant\pi/\omega_c$,有

$$\frac{2\tau^2}{\pi^2}|R''_X(0)|\leqslant R_X(0)-R_X(\tau)\leqslant\frac{\tau^2}{2}|R''_X(0)|.$$

证 依照相关函数的性质,有

$$R_X(0)-R_X(\tau)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}S_X(\omega)(1-\cos\omega)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}S_X(\omega)\frac{\omega^2\tau^2}{2}\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{\tau}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\omega^2S_X(\omega)\mathrm{d}\omega=-\frac{\tau^2}{2}R''_X(0)$$

及 $$R_X(0)-R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}S_X(\omega)(1-\cos\omega\tau)\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}S_X(\omega)2\sin^2(\frac{\omega\tau}{2})\mathrm{d}\omega.$$

因为 $$|\sin\alpha|\geqslant|2\alpha/\pi|\ (|\alpha|\leqslant\pi/2),$$

所以 $$R_X(0)-R_X(\tau)\geqslant\frac{2\tau^2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\omega^2S_X(\omega)\mathrm{d}\omega$$
$$=-\frac{2\tau^2}{\pi^2}R''_X(0).$$

又因为 $$E\{[X'(t)]^2\}=-R''_X(0)\geqslant0,$$

即 $$R''(X)\leqslant0,$$

故 $$\frac{2\tau^2}{\pi^2}|R''_X(0)|\leqslant R_X(0)-R_X(\tau)\leqslant\frac{\tau^2}{2}|R''_X(0)|.$$

第二节　谱密度的性质与互谱密度

主要内容

1. 设$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$是均方连续的实平稳过程，则其谱密度$S_X(\omega)$是$\omega$的实的、非负的偶函数，即$S_X(\omega)=S_X(-\omega)\geqslant 0$.

2. 设$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$是均方连续的平稳过程，其谱密度为$S_X(\omega)$，相关函数为$R_X(\tau)$. 若

$$\int_{-\infty}^{\infty}|R_X(\tau)|\,\mathrm{d}x<\infty,$$

则$S_X(\omega)$与$R_X(\tau)$是傅里叶变换对，即

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega.$$

上式即维纳-辛钦公式.

3. 设$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$和$\{Y(t),t\in(-\infty,\infty)\}$是两个均方连续且平稳相关的随机过程，则其互相关函数的傅里叶变换称为$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$与$\{Y(t),t\in(-\infty,\infty)\}$的**互谱密度**，即

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{XY}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

其中　$R_{XY}(\tau)=E[X(t_1)\overline{Y(t_2)}],\quad \tau=t_2-t_1,$

或　$S_{XY}(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[\overline{F_X(\omega,T)}F_Y(\omega,T)],$

其中$\overline{F_X(\omega,T)}=\int_{-T}^{T}\overline{X(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t,\overline{F_Y(\omega,T)}=\int_{-T}^{T}\overline{Y(t)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t.$

4. $S_{XY}(\omega)=\overline{S_{YX}(\omega)},\quad R_{XY}(-\tau)=\overline{R_{YX}(\tau)}.$

5. $\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)$和$\mathrm{Re}[S_{YX}(\omega)]$是$\omega$的偶函数；$\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]$和

$\mathrm{Im}[S_{YX}(\omega)]$ 是 ω 的奇函数.

6. 互谱密度与谱密度之间成立不等式

$$|S_{XY}(\omega)|^2 \leqslant S_X(\omega)S_Y(\omega).$$

7. 若 $R_{XY}(\tau)$ 绝对可积, $Z(t)=X(t)+Y(t)$, 则

$$\begin{aligned} S_Z(\omega) &= S_X(\omega)+S_Y(\omega)+S_{XY}(\omega)+S_{YX}(\omega) \\ &= S_X(\omega)+S_Y(\omega)+2\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]. \end{aligned}$$

8. 一个均值为零、功率谱密度在整个频率轴上有非零常数, 即 $S_X(\omega)=s_0$, $-\infty<\omega<\infty$ 的平稳随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 称为**白噪声过程**, 简称**白噪声**. 其相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega = s_0\sigma(\tau).$$

9. 带白噪声 $\{X(t), t\in T\}$ 的谱密度仅在某一有限频带上取非零常数. 如低通白噪声谱密度

$$S_X(\omega)=\begin{cases} s_0, & |\omega|\leqslant\omega_1, \\ 0, & |\omega|>\omega_1. \end{cases}$$

相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{s_0\omega_1}{\pi}\left[\frac{\sin\omega_1\tau}{\omega_1\tau}\right],$$

$$R_X(0)=\psi_X^2=\lim_{\tau\to 0}R_X(\tau)=\frac{s_0\omega_1}{\pi}.$$

疑 难 解 析

1. 维纳-辛钦公式有什么意义?

答 维纳-辛钦公式又称为平稳过程相关函数的谱表示式, 它揭示了从时间角度描述平稳过程 $X(t)$ 的统计规律与从频率角度描述 $X(t)$ 的统计规律之间的联系. 实际上, $S_X(\omega)$ 和 $R_X(\tau)$ 是一个傅里叶变换对.

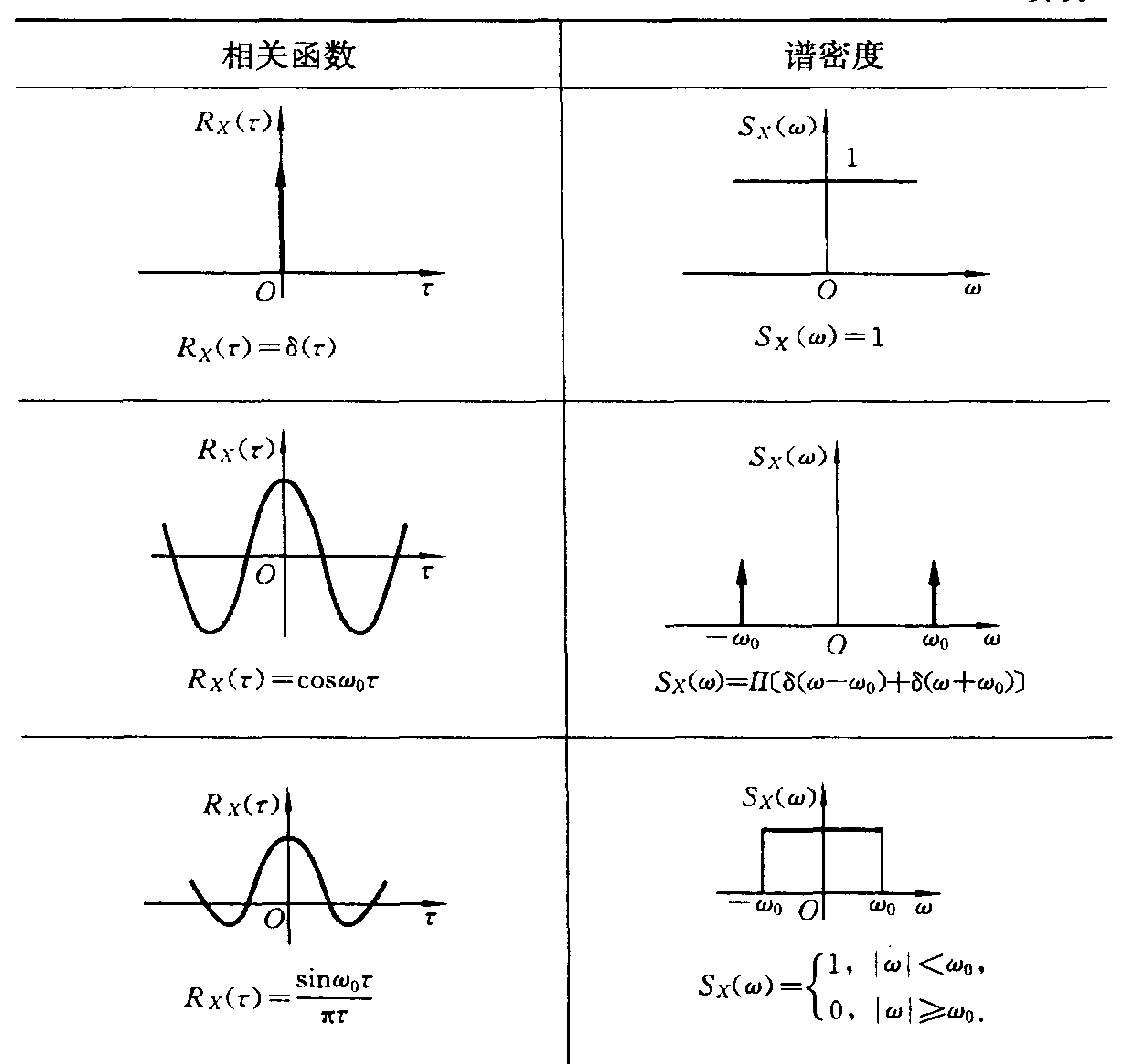
顺便说明, 关于谱密度的计算, 包括由相关函数计算谱密度或

由谱密度计算相关函数，是计算正逆傅里叶变换的问题，可以直接计算积分，也可以利用傅里叶变换表查出. 表 7.1 给出了几种常见的相关函数与谱密度函数的变换.

表 7.1

相关函数	谱密度
$R_X(\tau)=\mathrm{e}^{-a\|\tau\|}\quad(a>0)$	$S_X(\omega)=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$
$R_X(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{\|\tau\|}{T}, & \|\tau\|\leqslant T\\ 0, & \|\tau\|>T\end{cases}$	$S_X(\omega)=\dfrac{4\sin^2\dfrac{\omega T}{2}}{T\omega^2}$
$R_X(\tau)=\mathrm{e}^{-a\|\tau\|}\cos\omega_0\tau$	$S_X(\omega)=\dfrac{a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}+\dfrac{a}{a^2+(\omega+\omega_0)^2}$
$R_X(\tau)=1$	$S_X(\omega)=2\pi\delta(\omega)$

续表



相关函数	谱密度
$R_X(\tau)=\delta(\tau)$	$S_X(\omega)=1$
$R_X(\tau)=\cos\omega_0\tau$	$S_X(\omega)=\Pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$R_X(\tau)=\dfrac{\sin\omega_0\tau}{\pi\tau}$	$S_X(\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_0,\\ 0, & \lvert\omega\rvert\geqslant\omega_0.\end{cases}$

2. 互谱密度与(自)谱密度有什么不同?

答 (自)谱密度 $S_X(\omega)$ 表示平稳过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的平均功率关于频率的分布,而互谱密度没有明确的物理意义,引入它主要是为了能在频率域上描述两个平稳过程的相关性.

3. 当 $\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$ 和 $\{Y(t),t\in(-\infty,\infty)\}$ 是两个均方连续的平稳相关随机过程,且互相关函数绝对可积时,若 $Z(t)=X(t)+Y(t)$,则

$$S_Z(\omega)=S_X(\omega)+S_Y(\omega)+2\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)].$$

那么一般情形呢?

答 当 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是随机过程而不是平稳过程时，$Z(t)=X(t)+Y(t)$ 有可能是平稳过程. 如 $X(t)=A(t)\cos\omega t$，$Y(t)=B(t)\sin\omega t$，在 $A(t)$ 与 $B(t)$ 是独立平稳过程且均值均为零. 相关函数相等时，$X(t)$ 与 $Y(t)$ 不是平稳过程，而 $Z(t)$ 却是平稳过程，当 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是平稳过程但不平稳相关时，$Z(t)$ 也可能是平稳过程. 此时，不能用上式而只能用维纳-辛钦公式计算互谱密度.

4. 白噪声有什么意义？

答 白噪声是一种理想化的数学模型，实际上是不可能存在的. 它来源于白色光，可以分解为各种频率的光谱，功率大致是均匀的。但它具有数学处理简单方便的优点，常用来作为许多现象（能定义多种白噪声）的近似模拟.

方法、技巧与典型例题分析

在计算相关函数、谱密度和互谱密度时，常常用到傅里叶变换和 δ 函数的一些概念与性质，对于没有学过积分变换课程的读者来说，应补习一下这方面的知识. 同时，对某些较简单的积分可以利用傅里叶变换表直接查出结果.

例 1 设平稳过程 $\{X(t), t\in(-\infty,\infty)\}$ 的谱密度

$$S_X(\omega)=\frac{1}{(1+\omega^2)^2},\quad -\infty<\omega<\infty.$$

求相关函数 $R_X(\tau)$ 和平均功率 ψ_X^2.

解法 1 若平稳过程 $\{Y(t), t\in T\}$ 的相关函数是 $R_Y(\tau)=\frac{1}{2}e^{-|\tau|}$，则其谱密度 $S_Y(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}$. 由于

$$S_X(\omega)=\frac{1}{(1+\omega^2)^2}=[S_Y(\omega)]^2,$$

故 $$R_X(\tau)=R_Y(\tau)*R_Y(\tau)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|Z|}e^{-|\tau-Z|}dZ.$$

当 $\tau \geqslant 0$ 时，上式化为

$$R_X(\tau) = \frac{1}{4}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{Z} e^{-(\tau-Z)} dZ + \int_{0}^{\tau} e^{-Z} e^{-(\tau-Z)} dZ + \int_{\tau}^{\infty} e^{-Z} e^{(\tau-Z)} dZ\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{-\tau} + \tau e^{-\tau} + \frac{1}{2}e^{-\tau}\right) = \frac{1}{4}(e^{-\tau} + \tau e^{-\tau}).$$

又因为 $\quad R_X(-\tau) = \frac{1}{4}(e^{-\tau} - \tau e^{-\tau})$，

$$R_X(-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(-\omega) e^{-j\omega\tau} d(-\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega = R_X(\tau),$$

故 $\quad R_X(\tau) = \frac{1}{4}(e^{-|\tau|} + |\tau| e^{-|\tau|}), \quad -\infty < \tau < \infty.$

于是 $\quad \psi_X^2 = R_X(0) = 1/4.$

解法 2 利用复变函数的留数定理来求.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2} e^{j\omega\tau} d\omega \text{（上半平面有二级极点 j）}$$

$$= 2\pi j\left[\frac{d}{d\omega}(\omega - j)^2 \frac{1}{(\omega^2+1)^2} e^{j\omega\tau}\right]$$

$$= 2\pi j\left(\frac{2j^2}{8j^3}e^{-\tau} + \frac{\tau}{4j}e^{-\tau}\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{4}(e^{-\tau} + \tau e^{-\tau}),$$

所以 $\quad R_X(\tau) = \frac{1}{4}(e^{-\tau} + \tau e^{-\tau}).$

若 $\tau < 0$，令 $\omega = -Z$，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2} e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(Z^2+1)^2} e^{-jZ\tau} dZ = 2\pi j\left[\frac{d}{dZ}(Z-j)^2 \frac{e^{-jZ\tau}}{(Z^2+1)^2}\right]$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{4}(e^{\tau} - \tau e^{\tau}),$$

即 $$R_X(\tau)=\frac{1}{4}(e^{\tau}-\tau e^{\tau}).$$

综合可得 $R_X(\tau)=\frac{1}{4}(e^{-|\tau|}+|\tau|e^{-|\tau|})$，　$-\omega<\tau<\omega$，

故 $$\psi_X^2=R_X(0)=1/4.$$

解法 2 用到复数函数孤立奇点是极点的留数计算第二法则.

例 2　设随机过程 $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta)$. 其中 ω_0 和 A 是常数，Θ 是在 $(0,2\pi)$ 内服从均匀分布的随机变量.

(1) 利用 $\psi_X^2=\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}E[X^2(t)]dt$，求 $X(t)$ 的功率；

(2) 利用 $S_X(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{E[|X_T^2(t)|]}{2T}$，求 $X(t)$ 的功率谱，并由式 $\psi_X^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)d\omega$ 计算功率.

解　(1) 由均方值定义，得

$$E[X^2(t)]=E[A^2\cos^2(\omega_0 t+\Theta)]=\frac{A^2}{2}E[1+\cos(2\omega_0 t+2\Theta)]$$

$$=\frac{A^2}{2}+\frac{A^2}{2}\int_0^{\pi}\cos(2\omega_0 t+\theta)\frac{1}{\pi}d\theta=\frac{A^2}{2}.$$

于是 $$\psi_X^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X^2(t)]dt=\frac{A^2}{2}.$$

(2) 依定义，有

$$X_T(\omega)=\int_{-T}^{T}X(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-T}^{T}A\cos(\omega_0 t+\Theta)e^{-j\omega t}dt$$

$$=ATe^{j\Theta}\frac{\sin[(\omega-\omega_0)T]}{(\omega-\omega_0)T}+ATe^{-j\theta}\frac{\sin[(\omega+\omega_0)T]}{(\omega+\omega_0)T},$$

$$E[|X_T(\omega)|^2]$$

$$=E\left\{\left|ATe^{j\theta}\frac{\sin[(\omega-\omega_0)T]}{(\omega-\omega_0)T}+ATe^{-j\theta}\frac{\sin[(\omega+\omega_0)T]}{(\omega-\omega_0)T}\right|^2\right\}$$

$$=A^2T^2\left\{Sa^2[(\omega-\omega_0)T]+Sa^2[(\omega+\omega_0)T]\right.$$

$$+Sa[(\omega-\omega_0)T]Sa[(\omega+\omega_0)T]\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta\Big\}.$$

按照功率谱定义，并利用$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{T}{\pi}\left[\frac{\sin(aT)}{aT}\right]=\delta(a)$，得

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{E[\,|\,X_T(\omega)\,|^2]}{2T}$$

$$=\frac{A^2}{2}\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)],$$

于是，所求功率为

$$\psi_X^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2}{2}\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\mathrm{d}\omega=\frac{A^2}{2}.$$

例 3 若随机过程 $X(t)$ 的样本函数可表示为

$$X(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_0\cos n\omega_0(t+t_0)+b_n\sin n\omega_0(t+t_0)],$$

其中，t_0 是在一个周期内均匀分布的随机变量，a_n，b_n 是常数. 求 $X(t)$ 的功率谱密度 $S_X(\omega)$.

解 将 $X(t)$ 化为复指数形式，即

$$X(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0(t+t_0)},$$

其中 $F_0=\frac{a_0}{2},\quad F_n=\frac{1}{2}(a_n-\mathrm{j}b_n),\quad F_n=\overline{F_{-n}}.$

依相关函数定义，有

$$R_X(\tau)=E[X(t)\,\overline{X(t-\tau)}]$$

$$=E\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0(t+t_0)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{F_m}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0(t-\tau+t_0)}\Big]$$

$$=E\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_n\overline{F_m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-m)\omega_0(t+t_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\omega_0\tau}\Big].$$

因为 $$E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0(t+t_0)}]=0,$$

所以 $$R_X(\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\,F_m\,|^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\omega_0\tau}.$$

按照维纳-辛钦定理，得

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}|F_m|^2\delta(\omega-m\omega_0)$$

$$=2\pi|F_0|^2+2\pi\sum_{m=1}^{\infty}|F_m|^2[\delta(\omega-m\omega_0)+\delta(\omega+m\omega_0)]$$

$$=\frac{\pi}{2}a_0^2+\frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)[\delta(\omega-m\omega_0)+\delta(\omega+m\omega_0)].$$

例 4 实平稳随机过程$\{X(t),t\in T\}$的相关函数$R_X(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos\omega_1\tau+b^2e^{-a|\tau|}$,求谱密度$S_X(\omega)$.

解 依维纳-辛钦定理,有

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^2}{2}\cos\omega_1\tau e^{-j\omega\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}b^2e^{-a|\tau|}e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{\pi a^2}{2}[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)]$$

$$+\frac{b^2}{a-j\omega}e^{(a-j\omega)\tau}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{b^2}{a+j\omega}e^{-(a+j\omega)\tau}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{\pi a^2}{2}[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)]+\frac{2ab^2}{a^2+\omega^2}.$$

例 5 设平稳随机过程的谱密度$S_X(\omega)=\frac{2Aa^2}{\pi^2(\omega^2+a^2)^2}$,求相关函数$R_X(\tau)$及平均功率$\psi_X^2$.

解 $S_X(\omega)$的形式比较复杂,可用复变函数的留数来解.

$$R_X(\tau)=\frac{Aa^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega\tau}}{(\omega^2+a^2)^2}d\omega,$$

因为$\frac{e^{j|\tau|Z}}{(Z^2+a^2)^2}$在上半平面只有一个二级极点$aj$.

$$\text{Res}\left[\frac{e^{j|\tau|Z}}{(Z^2+a^2)^2},aj\right]=-j\,\frac{1+|a|\tau}{2a^3}e^{-|a|\tau},$$

故

$$R_X(\tau)=\frac{Aa^3}{\pi^2}2\pi j\cdot(-j)\,\frac{1+|a|\tau}{2a^3}e^{-|a|\tau}$$

$$=\frac{A(1+|a|\tau)}{\pi}e^{-|a|\tau}.$$

于是 $$\psi_X^2 = R_X(0) = A/\pi.$$

例 6 设平稳随机序列的谱密度为

$$S_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{|1-\varphi e^{-j\omega}|^2}, \quad |\varphi| < 1,$$

求相关函数 $R_X(n)$.

解 因为

$$R_X(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_X(\omega) e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma^2}{|1-\varphi e^{-j\omega}|^2} e^{jn\omega} d\omega$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\omega}{1-2\varphi\cos\omega+\varphi^2} d\omega,$$

利用留数计算定积分$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\omega + j\sin n\omega}{1-2\varphi\cos\omega+\varphi^2} d\omega$,化为复变函数积分

$$I = \frac{j}{\varphi}\oint_{|Z|=1} \frac{Z^n}{(Z-1/\varphi)(Z-\varphi)} dZ,$$

当$|\varphi| < 1$时,$Z=\varphi$是$|Z|=1$内唯一极点

$$\mathrm{Res}[R(Z),\varphi] = \lim_{Z\to\varphi} \frac{Z^n}{(Z-1/\varphi)} = \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^2-1}.$$

所以 $$I = \frac{j}{\varphi} \cdot \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^2-1} \cdot 2\pi j = \frac{2\pi\varphi^n}{1-\varphi^2},$$

而 $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{j\sin n\omega}{1-2\varphi\cos\omega+\varphi^2} d\omega \overset{\text{奇}}{=} 0,$$

故 $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\omega}{1-2\varphi\cos\omega+\varphi^2} d\omega = \frac{2\pi\varphi^n}{1-\varphi^2}.$$

于是 $$R_X(n) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \frac{2\pi\varphi^n}{1-\varphi^2} = \frac{\sigma^2\varphi^n}{1-\varphi^2}, \quad n = 0,1,\cdots.$$

例 7 设$\{X(t), t\in(-\infty,\infty)\}$是均值为零的正交增量过程,$E[|X(t_2)-X(t_1)|^2] = |t_2-t_1|$,若$Y(t) = X(t)-X(t-1)$.证明:$\{Y(t), t\in(-\infty,\infty)\}$是平稳过程,并求出$S_Y(\omega)$.

证 因为$E[Y(t)] = E[X(t)-X(t-1)] = 0-0 = 0$,

$$R_Y(t+\tau,t) = E[Y(t+\tau)\overline{Y(t)}]$$

$$= E\{[X(t+\tau)-X(t+\tau-1)][X(t)-X(t-1)]\},$$

利用增量在不重叠区间间隔时正交的性质对 τ 进行讨论，得：

若 $|\tau| \geqslant 1$，则 $R_Y(t+\tau,t)=0$；

若 $0 \leqslant \tau \leqslant 1$，则

$$
\begin{aligned}
&R_Y(t+\tau,t) \\
&= E(\{[X(t+\tau)-X(t)]+[X(t)-X(t+\tau-1)]\} \\
&\quad \cdot \{[X(t)-X(t+\tau-1)]+[X(t+\tau-1)-X(t-1)]\}) \\
&= E\{[X(t)-X(t+\tau-1)]^2\} = 1-\tau;
\end{aligned}
$$

若 $-1<\tau<0$，则

$$
\begin{aligned}
&R_Y(t+\tau,t) \\
&= E(\{[X(t+\tau)-X(t-1)]+[X(t-1)-X(t+\tau-1)]\} \\
&\quad \cdot \{[X(t)-X(t+\tau)]+[X(t+\tau)-X(t-1)]\}) \\
&= E\{[X(t+\tau)-X(t-1)]^2\} = 1+\tau.
\end{aligned}
$$

所以
$$
R_Y(\tau)=\begin{cases}1-|\tau|, & |\tau|<1, \\ 0, & |\tau| \geqslant 1,\end{cases}
$$

$$
E[Y^2(t)] = R_Y(0) < \infty,
$$

于是，可以确定 $Y(t)$ 是平稳过程，其功率谱

$$
\begin{aligned}
S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-1}^{1} (1-|\tau|) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= 2\int_0^1 (1-\tau)\cos\omega\tau \, d\tau = \frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}.
\end{aligned}
$$

例 8 设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 与 $\{Y(t), t \in T\}$ 平稳相关，其互谱函数是

$$
S_{XY}(\omega)=\begin{cases}a+\dfrac{jb\omega}{c}, & |\omega|<c, \\ 0, & \text{其它},\end{cases}
$$

其中 $c>0$，a,b 为常数，求 $R_{XY}(\tau)$.

解 依定义，有

$$
R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} \left(a+\frac{jb\omega}{c}\right) e^{j\omega\tau} d\omega
$$

$$= \frac{1}{\pi c \tau^2}[a(\tau - b)\sin c\tau + bc\tau \cos c\tau].$$

例 9 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个平稳随机过程，证明：

$\text{Re}\{S_{XY}(\omega)\} = \text{Re}\{S_{YX}(\omega)\}$，$\text{Im}\{S_{XY}(\omega)\} = -\text{Im}\{S_{YX}(\omega)\}$.

证 先求出互相关函数的关系

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] = R_{YX}(-\tau),$$

依维纳-辛钦定理，有

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau = \overline{S_{YX}(\omega)},$$

所以

$$\text{Re}\{S_{XY}(\omega)\} = \text{Re}\{S_{YX}(\omega)\},$$

$$\text{Im}\{S_{XY}(\omega)\} = -\text{Im}\{S_{YX}(\omega)\}.$$

例 10 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个相互独立的平稳过程，均值 m_X 与 m_Y 均不为零，令 $Z(t) = X(t) + Y(t)$，计算 $S_{XY}(\omega)$ 和 $S_{XZ}(\omega)$.

解 按照维纳-辛钦定理，有

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [C_{XY}(\tau) + m_X m_Y]e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$= m_X m_Y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}d\tau = 2\pi m_X m_Y \delta(\omega),$$

$$S_{XZ}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XZ}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [C_{XZ}(\tau) - m_X m_Z]e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [C_{XX}(\tau) + C_{XY}(\tau) - m_X(m_X + m_Y)]e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [R_X(\tau) + R_{XY}(\tau)]e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$= S_X(\omega) + S_{XY}(\omega) = S_X(\omega) + 2\pi m_X m_Y \delta(\omega).$$

例 11 设 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 是均值为零的实平稳过程，已知 $R_X(\tau) = R_Y(\tau)$，$R_{XY}(\tau) = -R_{XY}(-\tau)$，证明：

$$Z(t) = X(t)\cos\omega_0 t + Y(t)\sin\omega_0 t \quad (\omega_0\text{是常数})$$

是平稳过程.

证 依定义，有

$$E[Z(t)] = \cos\omega_0 t E[X(t)] + \sin\omega_0 t E[Y(t)] = 0,$$

$$\begin{aligned}&R_Z(t+\tau,t)\\&= E\{[X(t+\tau)\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)+Y(t+\tau)\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)]\\&\quad\cdot[X(t)\cos\omega_0 t+Y(t)\sin\omega_0 t]\}\\&= R_X(\tau)\cos\omega_0\tau - R_{XY}(\tau)\sin\omega_0\tau.\end{aligned}$$

所以，与 t 无关，只与 τ 有关.

$$E[Z^2(t)] = R_Z(0) = R_X(0) < \infty,$$

从而，过程符合定义，$Z(t)$ 是平稳过程.

$$\begin{aligned}S_Z(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Z(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\\&= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)\cos\omega_0\tau e^{-j\omega\tau}d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)\sin\omega_0\tau e^{-j\omega\tau}d\tau\\&= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)\ \frac{1}{2}(e^{-j\omega_0\tau}+e^{j\omega_0\tau})e^{-j\omega\tau}d\tau\\&\quad+\int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)\ \frac{1}{2j}(e^{-j\omega_0\tau}-e^{-j\omega_0\tau})e^{-j\omega\tau}d\tau\\&= \frac{1}{2}[S_X(\omega+\omega_0)+S_X(\omega-\omega_0)]\\&\quad+\frac{j}{2}[S_{XY}(\omega-\omega_0)-S_{XY}(\omega+\omega_0)].\end{aligned}$$

例 12 随机过程 $X(t)$ 具有如图 7.3 所示的样本函数，a 是常数，t_0 是在周期 T 内均匀分布的随机变量. 求：

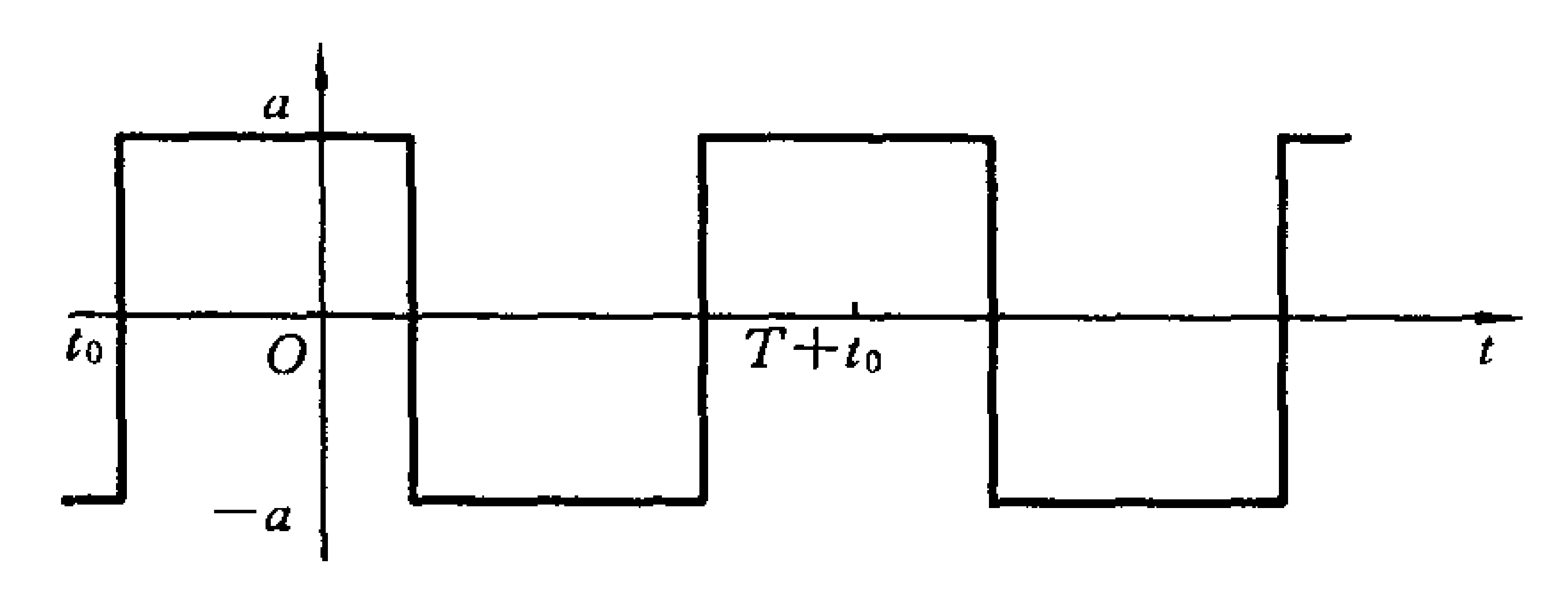


图 7.3

(1) $X(t)$ 的功率谱密度 $S_X(\omega)$；

(2) 当 $Y(t)=a+X(t)$ 时的 $S_Y(\omega)$.

解 (1) 先将 $X(t)$ 展开成傅里叶级数形式

$$X(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0|t-t_0|},$$

其中 $$F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}X(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{2a}{jn\pi}\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

依相关函数定义,有

$$\begin{aligned}R_X(\tau)&=E[X(t)X(t-\tau)]\\&=E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0|t-t_0|}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{F_m}e^{-jm\omega_0(t-\tau-t_0)}\right]\\&=E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_n\overline{F_m}e^{j(n-m)\omega_0(t-t_0)}e^{jm\tau}\right]\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|F_m|^2e^{jm\tau}.\end{aligned}$$

再依维纳-辛钦定理,得

$$\begin{aligned}S_X(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}|F_m|^2\delta(\omega-m\omega_0)\\&=\frac{8a^2}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right)\delta(\omega-m\omega_0).\end{aligned}$$

(2) 对 $Y(t)=a+X(t)$,有

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E[Y(t)Y(t-\tau)]=E\{[a+X(t)][a+X(t-\tau)]\}\\&=a^2+aE[X(t)]+aE[X(t-\tau)]+E[X(t)X(t-\tau)]\\&=a^2+R_X(\tau).\end{aligned}$$

再依维纳-辛钦定理,得

$$\begin{aligned}S_Y(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}R_Y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=2\pi a^2\delta(\omega)+S_X(\omega)\\&=2\pi a^2\delta(\omega)+\frac{8a^2}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right)\delta(\omega-m\omega_0).\end{aligned}$$

例 13 设平稳过程 $X(t)$ 有有限的均方值,功率谱密度是有理函数

$$S_X(\omega)=C\frac{(\omega-\alpha_1)(\omega-\alpha_2)\cdots(\omega-\alpha_N)}{(\omega-\beta_1)(\omega-\beta_2)\cdots(\omega-\beta_M)},\quad \alpha_i\neq\beta_i,$$

其中 N 和 M 是偶数，证明：

(1) $S_X(\omega)$ 是实的偶函数；

(2) C 为常数；

(3) 具有非零虚部的 α_i 和 β_i 共轭成对出现；

(4) 对任意 ω, $S_X(\omega)\geqslant 0$；

(5) 分子若有实根，则必为偶次的；

(6) 分母没有实根；

(7) $N<M$.

证 (1) 依维纳-辛钦定理，有

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau-\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau.$$

因为 $R(\tau)$ 是偶函数，所以第二个积分为零. 从而 $S_X(\omega)$ 是实的偶函数.

(2) $$\lim_{\omega\to\infty}S_X(\omega)=\lim_{\omega\to\infty}C\omega^{N-M}\frac{(1-\alpha_1/\omega)(1-\alpha_2/\omega)\cdots(1-\alpha_N/\omega)}{(1-\beta_1/\omega)(1-\beta_2/\omega)\cdots(1-\beta_M/\omega)},$$

当 $\omega\to\infty$ 时，$S_X(\omega)\to C\omega^{N-M}$. 因为 $S_X(\omega)$ 是实函数，所以 C 为实常数.

(3) 不妨以零点为例，设 $\alpha_1=a_1+\mathrm{j}b_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}$, $\alpha_2=a_2+\mathrm{j}b_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}$，则

$$(\omega-\alpha_1)(\omega-\alpha_2)=\omega^2-[(a_1+a_2)+\mathrm{j}(b_1+b_2)]\omega+r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)},$$

当且仅当 $b_1=-b_2$, $\theta_1=-\theta_2$，即 $\alpha_1=\overline{\alpha_2}$ 时，上式为实数，故命题成立. 对于极点的讨论与之类似.

(4) 依定义知，$S_X(\omega)\geqslant 0$.

(5) 设 α_i 为一个实数，则当且仅当含 α_i 的因式为偶次时，对任意的 ω 有 $S(\omega)\geqslant 0$. 否则当 $\omega<\alpha_i$ 和 $\omega>\alpha_i$ 时，$S_X(\omega)$ 有不同符号，与 $S_X(\omega)\geqslant 0$ 矛盾.

(6) 因为均方值 ψ_X^2 有限，而 $\psi_X^2=\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega$. 故若 $S_X(\omega)$

分母中有一实根，当积分路线经过此点时，积分成为奇异的，与假设得出矛盾.

(7) 因$\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\mathrm{d}\omega$存在，应用$\lim\limits_{\omega\to\infty}\omega S_X(\omega)=0$. 当$\omega$很大时，由题(2) 知$S_X(\omega)\approx C/\omega^{M-N}$，要使极限式成立，应有$M>N$. 又由题(3) 知，$M,N$均为偶数，故必有$M\geqslant N+2$.

例 14 随机过程$Y(t)$是由一个各态历经的白噪声过程$X(t)$延迟时间T后产生的. 若$X(t)$和$Y(t)$的谱密度是S_0，求互相关函数$R_{XY}(\tau)$和$R_{YX}(\tau)$，以及互谱密度$S_{XY}(\omega)$和$S_{YX}(\omega)$.

解 依定义$R_{XY}(\tau)=E[X(t)\overline{Y(t-\tau)}]=R_{YX}(-\tau)$，其中$Y(t+T)=X(t)$. 由此得

$$Y(t)=X(t-T),\quad Y(t-\tau)=X(t-\tau-T),$$

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t)\overline{X(t-\tau-T)}]=R_{YX}(-\tau),$$

$$E[X(t)\overline{X(t-\tau-T)}]=R_X(\tau+T),$$

所以 $$R_{XY}(\tau)=R_X(\tau+T)=S_0\delta(\tau+T)=R_{YX}(-\tau),$$

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{XY}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}S_0\delta(\tau+T)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=S_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}.$$

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{YX}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}S_0\delta(-\tau+T)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=S_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}.$$

$$R_{XY}(T)=R_X(0)=R_{YX}(T),$$

图形如图 7.4 所示.

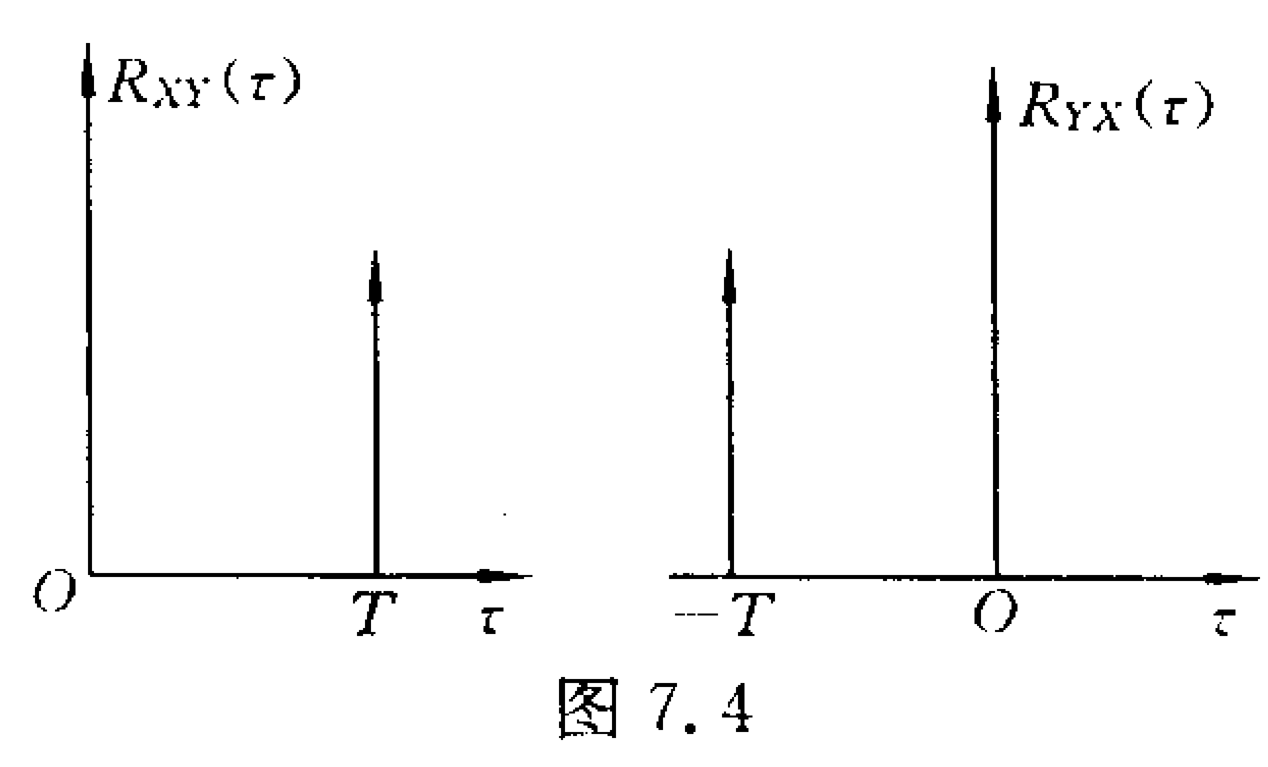


图 7.4

第三节　平稳过程通过线性系统的分析

主要内容

一、线性时不变系统

1. 满足下列条件的算子称为**线性算子**. 若 $y_1(t)=L[x_1(t)]$, $y_2(t)=L[x_2(t)]$,对任意常数 α,β,有

$$
\begin{aligned}
L[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)] &= \alpha L[x_1(t)]+\beta L[x_2(t)] \\
&= \alpha y_1(t)+\beta y_2(t).
\end{aligned}
$$

对于一个系统,若算子 L 是线性的,则该系统称为**线性系统**.

若以 $x(t)$ 表示系统的输入信号,以 $y(t)$ 表示系统的输出,有关系式 $y(t)=L[x(t)]$ 成立,则 L 表示系统的 $x(t)$ 的作为,是对 $x(t)$ 运算的符号,称为**运算子或算子**. L 代表各种可能的数学运算方法.

2. 若 L 为线性系统的算子,并对任意的时间平移 $\tau>0$,有 $y(t+\tau)=L[x(t+\tau)]$,则称该系统是**线性时不变系统**.

3. 设 L 为线性时不变系统,如果输入为一谐波信号 $x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$,则输出为 $y(t)=H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. 其中 $H(\mathrm{j}\omega)$ 一般是一个复值函数,称为系统的**频率响应函数**.

4. 设 L 为连续的线性时不变系统,并具有频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)$,则当输入为 $x(t)$ 时,输出 $y(t)$ 为

$$
y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-s)X(s)\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)X(t-\tau)\mathrm{d}\tau,
$$

其中
$$
h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t.
$$

如果输入 $x(t)$ 是一个单位脉冲 $\delta(t)$,则有

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\delta(s)\mathrm{d}s=h(t).$$

$h(t)$ 可以看成系统在输入一个单位脉冲时的输出，称为**脉冲响应**. 脉冲响应与频率响应构成一个傅里叶变换对.

对于一个线性时不变系统，如果系统的脉冲响应可积，即 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$，则这个系统是稳定的.

5. 设输入 $x(t)$、输出 $y(t)$ 和脉冲响应 $h(t)$ 都满足傅里叶变换条件，它们的傅里叶变换分别为 $X(\omega)$，$Y(\omega)$ 和 $H(\omega)$，则有下列傅里叶变换对：

$$\begin{cases}X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t,\\ x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega,\end{cases}\qquad\begin{cases}Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t,\\ y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}Y(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega,\end{cases}$$

$$\begin{cases}H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t,\\ h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega,\end{cases}$$

且 $$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega),\quad y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t.$$

这里，$H(\omega)$ 也可以写成 $H(\mathrm{j}\omega)$.

6. 如果输出 $y(t)$ 在时刻 t 的值只决定于时刻 t 的输入 $x(t)$ 的值，则称该系统为**瞬时系统**.

不是瞬时系统的系统称为**动态系统**.

一个系统在时刻 t 的输出完全决定于在 $[t-T,t]$ 区间的输出值 $(T>0)$，称这个系统为记忆时间为 T 的记忆系统.

在 t 时的输出 $y(t)$ 值仅与过去（包括现在）的输入值有关，而与将来的输入值无关的系统称为可实现（或有因果性）的系统，即 $h(t,\tau)=0\ (\tau>t)$.

如果动态系统的输入、输出是连续时间函数且可用一组常微分方程来描述，则称之为**集总参数、连续时间的动态系统**；如果输

入、输出是离散时间函数，且可用一组差分方程来描述，则称之为**集总参数、离散时间的动态系统**.

线性、集总参数的动态系统的输入、输出关系可用卷积函数来描述，即 $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$，其中 $h(t,\tau)=L\{\delta(t-\tau)\}$ 表示在 τ 时输入端加以冲激信号而在 t 时输出端的响应.

7. 对于时不变的线性动态系统，有 $L\{\delta(t-\tau)\}=h(t-\tau)$，即时不变、线性动态系统的冲激响应仅与时间差 $(t-\tau)$ 有关.

对于线性时不变、具有因果性的动态系统，有

$$y(t)=L\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

即输出为输入函数与系统冲激响应的卷积.

二、输入与输出之间的联系

1. 设 L 是线性时不变且对均方收敛连续的系统，则

(1) 当输入 $X(t)$ 是实平稳过程时，输出 $Y(t)$ 也是实平稳过程；

(2) $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的随机谱函数之间有关系

$$\zeta_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}H(\mathrm{j}u)\mathrm{d}\zeta_X(u);$$

(3) $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的谱函数之间有关系

$$F_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}|H(\mathrm{j}u)|^2\mathrm{d}F_X(u).$$

谱密度之间有关系 $S_Y(\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|^2S_X(\omega)$. 因为 $H(\mathrm{j}\omega)$ 是系统的频率响应函数，所以称 $|H(\mathrm{j}\omega)|^2$ 为系统的**频率增益因子或频率传输函数**.

2. 设 $\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$ 的均方连续的平稳过程，其均值为 m_X，相关函数为 $R_X(\tau)$，则输出过程

$$Y(t)=\int_{0}^{\infty}h(t-\tau)X(\tau)\mathrm{d}\tau$$

仍是平稳过程，其均值和相关函数分别为

$$m_Y(t)=m_X\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\mathrm{d}u=\text{常数},$$

$$R_Y(t,t+\tau)=R_Y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau-u+v)h(u)h(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

上式也写成 $R_Y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{YX}(t_1,t_2-u)h(u)\mathrm{d}u$,

或 $$R_Y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{XY}(t_1-u,t_2)h(u)\mathrm{d}u.$$

$R_X(\tau-u+v)$ 也写成 $R_X(t-u,t-v)$.

3. 设 L 是线性时不变且对均方收敛连续的系统，若输入 $X(t)(-\infty<t<\infty)$ 是均方连续的平稳过程，则输出 $Y(t)$ 也是平稳过程，且 $X(t),Y(t)$ 平稳相关，其互相关函数与互谱密度分别为

$$R_{XY}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)R_X(\tau-u)\mathrm{d}u,$$

$$S_{XY}(\omega)=H(\mathrm{j}\omega)S_X(\omega).$$

其中 $S_X(\omega)$ 是 $X(t)$ 的谱密度，$h(t)$ 是系统的脉冲响应函数，$H(\mathrm{j}\omega)$ 是系统的频率响应函数($h(u)$ 的傅里叶变换.

三、多个平稳过程之和的输入与输出之间的关系

设系统的输入 $X(t)=X_1(t)+X_2(t)$ 是两个平稳相关的随机过程之和. 若系统是时不变的，则输出 $Y(t)=Y_1(t)+Y_2(t)$，且

$$E[Y(t)]=(mX_1+mX_2)\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\mathrm{d}u=\text{常数},$$

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E\{[Y_1(t)+Y_2(t)][\overline{Y_1(t_1+\tau)Y_2(t_2+\tau)}]\}\\&=R_{Y_1}(\tau)+R_{Y_2}(\tau)+R_{Y_1Y_2}(\tau)+R_{Y_2Y_1}(\tau),\end{aligned}$$

其中 $R_{Y_1Y_2}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_{X_1X_2}(\tau+u_1-u_2)h(u_1)h(u_2)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2$,

$$R_{XY}(\tau)=R_{X_1Y_1}(\tau)+R_{X_2Y_1}(\tau)+R_{X_1Y_2}(\tau)+R_{X_2Y_2}(\tau).$$

若 $R_X(\tau)$ 绝对可积，则有

$$S_Y(\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|^2[S_{X_1}(\omega)+S_{X_2}(\omega)+S_{X_1X_2}(\omega)+S_{X_2X_1}(\omega)];$$

若 $R_{XY}(\tau)$ 绝对可积，则有

$$S_{XY}(\omega)=H(\mathrm{j}\omega)[S_{X_1}(\omega)+S_{X_1X_2}(\omega)+S_{X_2X_1}(\omega)+S_{X_2}(\omega)].$$

疑难解析

1. 怎样理解一个线性时不变系统的输入与输出?

答 设一个线性时不变系统可以用微分方程

$$a_0X^{(n)}(t)+a_1X^{(n-1)}(t)+\cdots+a_nX(t)=Y(t)$$

来描述,其中 $Y(t),t\in(-\infty,\infty)$ 是平稳过程,$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是常数,则随机过程

$$X(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-s)Y(s)\mathrm{d}s,\quad -\infty<t<\infty$$

是微分方程在$(-\infty,\infty)$ 上的唯一平稳过程解,其中 $h(t)$ 是脉冲响应函数.

对比之下,即知当输入是 $Y(t)$ 时,微分方程的解即为系统的输出.

2. 频率响应函数有什么意义?

答 对线性时不变系统输入一谐波信号 $x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 时,输出为 $y(t)=L[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$($H(\mathrm{j}\omega)$ 也写成 $H(\omega)$),也是同频率的谐波,只是振幅和相位发生了一些变化. 而 $H(\mathrm{j}\omega)$ 反映了这个变化,称为系统的响应函数. 如果将 $H(\mathrm{j}\omega)$ 表示为 $H(\mathrm{j}\omega)=A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(\omega)}$,则 $|A(\omega)|=|H(\mathrm{j}\omega)|$ 称为系统的振幅特性,$\theta(\omega)$ 是 $H((\mathrm{j}\omega)$ 的幅角,称为系统的相位特性.

3. 说明线性系统的输出过程 $Y(t)$ 的相关函数的意义和求法.

答 当输入平稳过程 $X(t)$ 的相关函数是 $R_X(\tau)$ 时,输出过程 $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)X(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的相关函数

$$\begin{aligned}R_Y(t_1,t_2)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)h(v)R_X(\tau-u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=R_Y(\tau)\ (\tau=t_1-t_2).\end{aligned}$$

显然,相关函数 $R_Y(\tau)$ 只是时间差 $\tau=t_1-t_2$ 的函数,所以说明输出过程 $Y(t)$ 是平稳的. 并由 $R_{YX}(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)$ 知,输出

过程 $Y(t)$ 与输入过程 $X(t)$ 之间还是联合平稳的.

同时,还可以得出

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * \overline{h(-\tau)}.$$

所以,输出相关函数还可以通过两次卷积产生.第一次是输入相关函数 $R_X(\tau)$ 与脉冲响应的卷积 $R_{YX}(\tau)$,第二次是 $R_{YX}(\tau)$ 与 $\overline{h(-\tau)}$ 的卷积(见图 7.5).

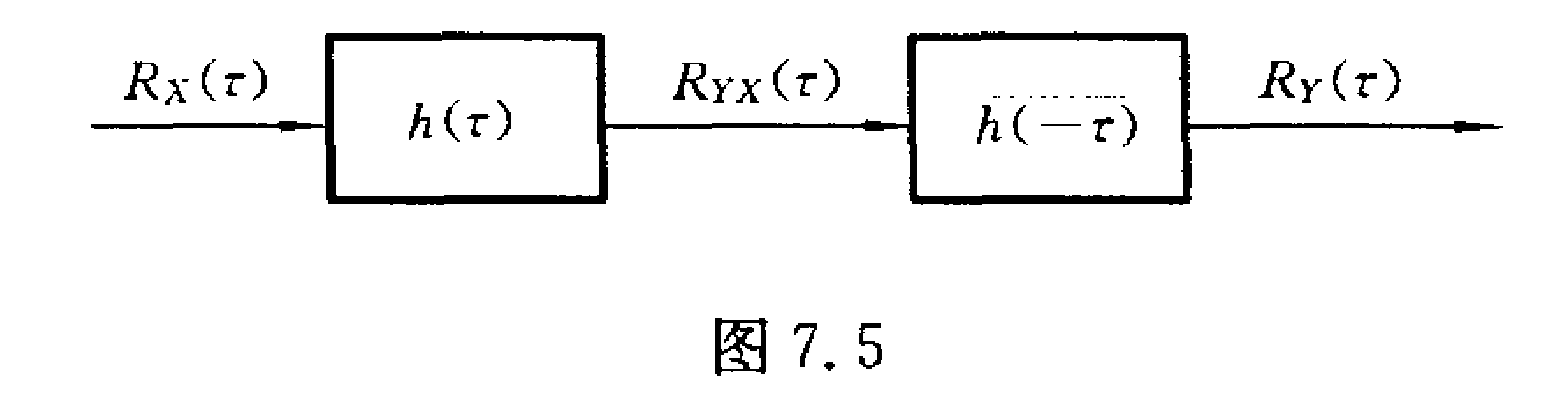


图 7.5

方法、技巧与典型例题分析

本节的例题比较复杂,很多是实际应用问题,要与物理、电工、声学等知识相结合,计算的量也较大、较复杂.所以,一是要牢记公式,二是要认真分析题设,从条件中寻找依据寻求方法,才能简捷地求得正确的解.

例 1 验证下列线性系统是否线性时不变系统:

(1) 如果系统 L 对于任意的 t,都有

$$y(t) = L[x(t)] = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t};$$

(2) 如果系统 L 对于任意的 t, 都有

$$y(t) = L[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)x(s)\mathrm{d}s = x(t) * h(t);$$

(3) 如果线性系统 L 对任意的 t,都有

$$y(t) = L[x(t)] = [x(t)]^2.$$

解 用定义验证是否线性,是否时不变.

(1) 因为

$$L\left[\sum_{k=1}^{n} a_k x_k(t)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k x_k(t)\right] = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}x_k(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k L[x_k(t)] = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k(t),$$

所以,L 是线性的. 又

$$L[x(t+\tau)] = \frac{\mathrm{d}x(t+\tau)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t+\tau)}{\mathrm{d}(t+\tau)} \cdot \frac{\mathrm{d}(t+\tau)}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}x(t+\tau)}{\mathrm{d}(t+\tau)} = y(t+\tau),$$

所以,L 是时不变的. 故 L 是线性时不变系统.

(2) 因为

$$L\left[\sum_{k=1}^{n} a_k x_k(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\left[\sum_{k=1}^{n} a_k x_k(s)\right]\mathrm{d}s$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s) x_k(s)\mathrm{d}s$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k L[x_k(t)] = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k(t),$$

$$L[x(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)x(s+\tau)\mathrm{d}s \quad (\text{令 } u = s+\tau)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-u)x(u)\mathrm{d}u = y(t+\tau),$$

所以,L 是线性时不变系统.

(3) 因为

$$L[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)]$$
$$= [a_1x_1(t) + a_2x_2(t)]^2$$
$$= a_1^2[x_1(t)]^2 + 2a_1a_2x_1(t)x_2(t) + a_2^2[x_2(t)]^2,$$

但 $\quad a_1L[x_1(t)] + a_2L[x_2(t)] = a_1[x_1(t)]^2 + a_2[x_2(t)]^2,$

故 $\quad L[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] \neq a_1L[x_1(t)] + a_2L[x_2(t)],$

所以,L 不是线性时不变系统.

例 2 设系统的输出 $y(t)$ 与输入 $x(t)$ 有以下关系:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i y(t)}{\mathrm{d}t^i} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{\mathrm{d}^k x(t)}{\mathrm{d}t^k} \quad (n > m).$$

取初始条件使齐次方程 $\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i y(t)}{\mathrm{d}t^i} = 0$ 的通解中所含任意常数为零. 求系统的频率响应.

解 可依定理求解,但用傅里叶变换求解更简单.

对题给方程两边进行傅里叶变换,并利用初始条件,可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^i y(t)}{\mathrm{d}t^i} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t = (\mathrm{j}\omega)^i Y(\omega) \quad (\text{微分性质}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^k x(t)}{\mathrm{d}t^k} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t = (\mathrm{j}\omega)^k X(\omega),$$

故
$$\sum_{i=0}^{n} a_i (\mathrm{j}\omega)^i Y(\omega) = \sum_{k=0}^{m} b_k (\mathrm{j}\omega)^k X(\omega).$$

移项,得
$$Y(\omega) = \left[X(\omega) \sum_{k=0}^{m} b_k (\mathrm{j}\omega)^k\right] \bigg/ \left[\sum_{i=0}^{n} a_i (\mathrm{j}\omega)^i\right]$$
$$= H(\mathrm{j}\omega) X(\omega),$$

所以
$$H(\mathrm{j}\omega) = \left[\sum_{k=0}^{m} b_k (\mathrm{j}\omega)^k\right] \bigg/ \left[\sum_{i=0}^{n} a_i (\mathrm{j}\omega)^i\right].$$

例 3 求图 7.6 所示 RC 电路系统中的频率响应.

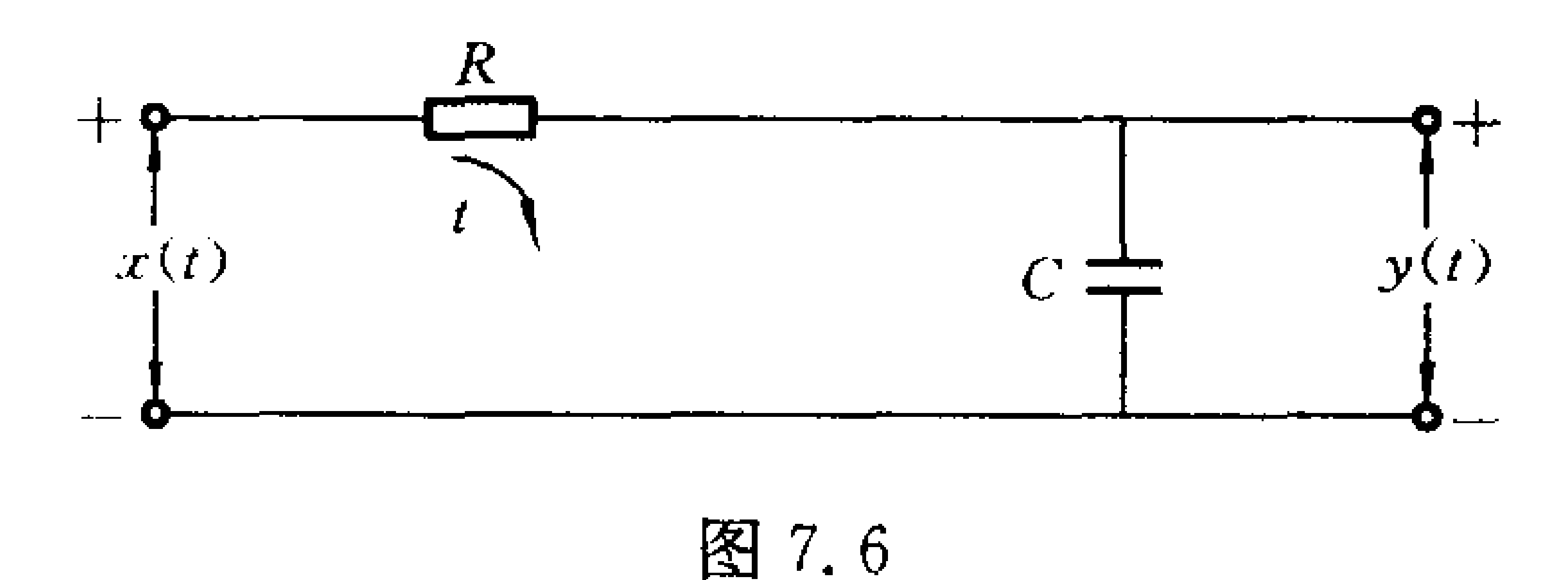


图 7.6

解 设输入为 $x(t)$,输出为 $y(t)$,$y(t)$ 即电容上的电压,设回路电流为 i,则由关系式

$$\begin{cases} i = C\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \\ x(t) = iR + y(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) = x(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}y(t) = \dfrac{1}{RC}x(t). \end{cases}$$

设 $a = 1/RC$,即得一阶线性常系数微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + ay(t) = ax(t),$$

所以该系统是一个线性时不变系统. 令 $x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$,可解得 $y(t)=\frac{a}{a+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$,所以系统的频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{a}{a+\mathrm{j}\omega}.$$

例 4 某系统的输入 $x(t)$ 与输出 $y(t)$ 之间有关系式

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\beta(t-s)}x(s)\mathrm{d}s,\quad \beta>0.$$

求系统的脉冲响应函数 $h(t)$.

解 依定义,有

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\beta(t-s)}\delta(s)\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t>0.\end{cases}$$

当 $t=0$ 时,$h(t)$ 没有定义.

例 5 设线性系统 $H(\mathrm{j}\omega)$ 的输入是平稳过程 $x(t)$,功率谱密度是 $S_X(\omega)$,输出是 $Y(t)$.

(1) 求误差过程 $E(t)=Y(t)-X(t)$ 的功率谱密度函数 $S_E(\omega)$;

(2) 如图 7.7 所示,设输入到 RC 电路的是一个二元波过程,求误差过程 $E(t)$ 的功率谱密度 $S_E(\omega)$.

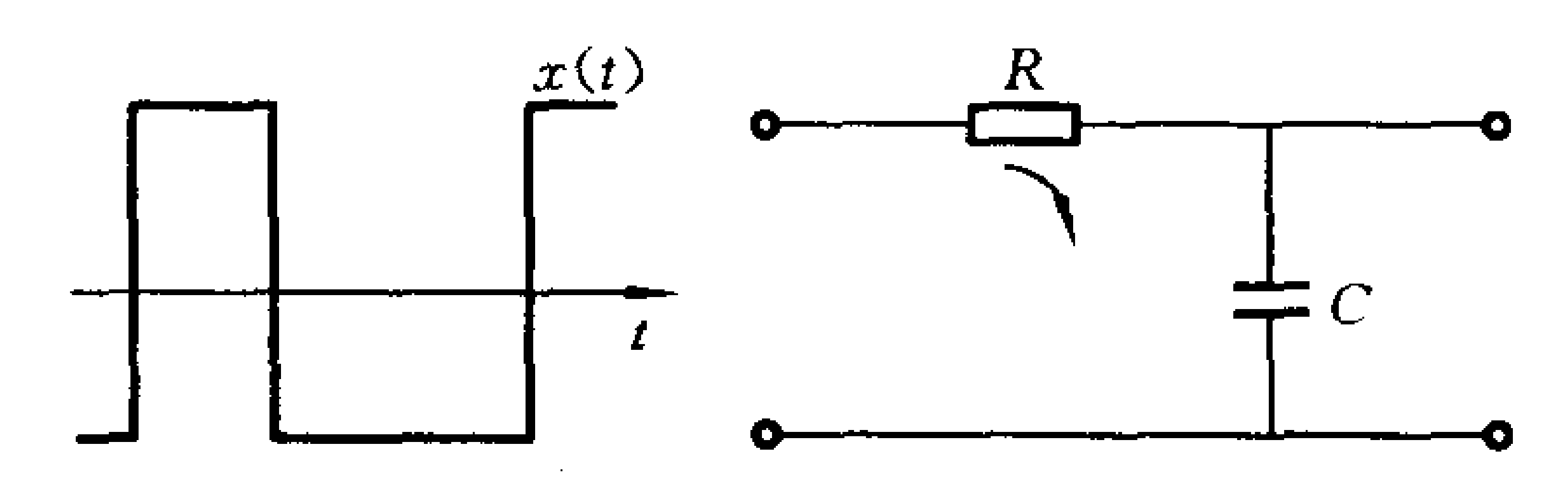


图 7.7

解 (1) 依相关函数定义,有

$$\begin{aligned}R_E(\tau)&=E\{[Y(t)-X(t)][Y(t-\tau)-X(t-\tau)]\\&=R_Y(\tau)+R_X(\tau)-R_{XY}(\tau)-R_{YX}(\tau).\end{aligned}$$

因为

$$S_Y(\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|^2S_X(\omega),$$

$$S_{YX}(\omega)=H(\mathrm{j}\omega)S_X(\omega),\quad S_{XY}(\omega)=\overline{H(\mathrm{j}\omega)}S_X(\omega),$$

所以 $S_E(\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|^2 S_X(\omega)+S_X(\omega)-\overline{H(\mathrm{j}\omega)}S_X(\omega)$

$$-H(\mathrm{j}\omega)S_X(\omega)$$

$$=|H(\mathrm{j}\omega)-1|^2 S_X(\omega).$$

(2) 由例3知,RC电路的 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{a}{a+\mathrm{j}\omega}$, $a=\dfrac{1}{RC}$. 又由第一节例12知,二元波过程的功率谱密度 $S_X(\omega)=\dfrac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2}$,所以

$$S_E(\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)-1|^2 S_X(\omega)=\frac{4\sin^2(\omega/2)}{a^2+\omega^2}.$$

例6 设有电路如图7.8所示.输入为白噪声过程 $X(t)$,相关函数 $R_X(\tau)=S_0\delta(\tau)$,求系统的冲激响应函数 $h(t)$ 和输出过程 $Y(t)$ 的均方值 ψ_Y^2.

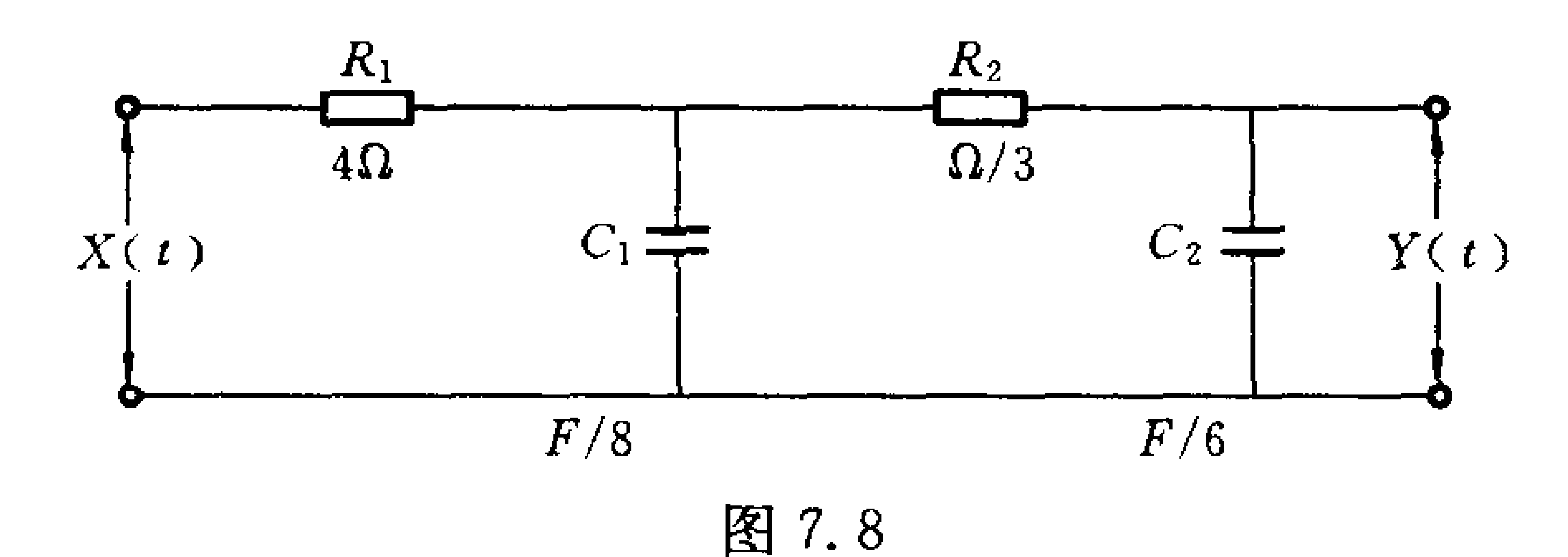


图 7.8

解 由分压关系式写出系统的频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=1/[1+\mathrm{j}\omega(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)-\omega^2R_1R_2C_1C_2]$$

$$=36/(36+\mathrm{j}44\omega-\omega^2)$$

$$=\frac{36}{16\sqrt{7}}\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega+22-8\sqrt{7}}-\frac{1}{\mathrm{j}\omega+22+8\sqrt{7}}\right),$$

则相应的系统脉冲响应函数

$$h(t)=\mathscr{F}^{-1}[H(\mathrm{j}\omega)]=\frac{9}{4\sqrt{7}}[\mathrm{e}^{-(22-8\sqrt{7})t}-\mathrm{e}^{-(22+8\sqrt{7})t}]u(t).$$

依定义,$Y(t)$ 的均方值为

$$\psi_Y^2=R_Y(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_0h^2(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{81}{112}S_0\left\{\int_0^{\infty}[\mathrm{e}^{-(22-8\sqrt{7})t}-\mathrm{e}^{-(22+8\sqrt{7})t}]^2\mathrm{d}t\right\}=\frac{9}{22}S_0.$$

例 7 设一力学系统如图 7.9 所示. 输入是作用在质块上的力 $x(t)$,输出是位移 $y(t)$ (设质块质量为 m,劲度系数是 k,$C>0$ 是阻尼系数,且 $c^2<4$). 求系统的频率响应 $H(j\omega)$.

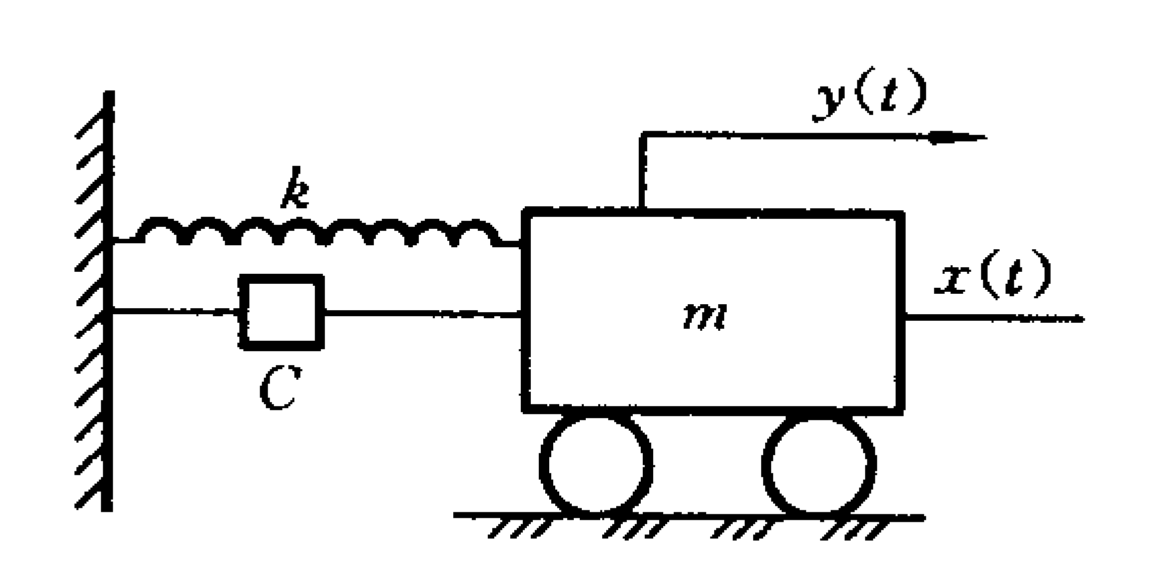


图 7.9

若输入 $X(t)$ 是白噪声,$S_X(\omega)=S_0$,求输出 $Y(t)$ 的谱密度、相关函数和平均功率.

解 此力学系统的运动方程

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+C\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=x(t)$$

是一个二阶线性常系数微分方程,所以该系统是一个线性时不变系统. 令 $x(t)=e^{j\omega t}$,因为 $y(t)=H(j\omega)e^{j\omega t}$,所以代入运动方程得

$$m(j\omega)^2H(j\omega)e^{j\omega t}+C(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}+kH(j\omega)e^{j\omega t}=e^{j\omega t},$$

化简即得
$$H(j\omega)=\frac{1}{k+jc\omega-m\omega^2}.$$

故
$$H(-j\omega)=\frac{1}{k-jc\omega-m\omega^2}.$$

若 $X(t)$ 是白噪声,则

$$\begin{aligned}S_Y(\omega)&=H(j\omega)H(-j\omega)S_X(\omega)\\&=\frac{S_0}{k^2}\Big/\left\{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]+2\left(\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\},\end{aligned}$$

其中
$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \xi=\frac{C}{2\sqrt{km}}.$$

利用留数可求得 $Y(t)$ 的相关函数

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_Y(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega\\&=\frac{S_0\omega_n}{8\xi k^2}e^{-\omega_n|\tau|}\left[\cos\omega_n\tau\sqrt{1-\xi^2}+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_n\,|\tau|\sqrt{1-\xi^2}\right].\end{aligned}$$

令 $\tau=0$,即得输出的平均功率

$$\psi_Y^2 = R_Y(0) = \frac{S_0\omega}{8\xi k^2}.$$

例 8 设有一 RC 电路系统,输入电压 $\{X(t), t\in(-\infty,\infty)\}$ 的均值为零,相关函数 $R_X(\tau)=\sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$, $\beta>0$, $a\neq\beta$. 求输出过程 $\{Y(t)\}$ 及相关函数 $R_X(\omega)$ 与谱密度 $S_Y(\omega)$.

解 由例 3 知, $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{a}{\mathrm{j}\omega+a}$, $a=\dfrac{1}{RC}$, 而

$$h(t)=\begin{cases} a e^{-at}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

所以,输出过程

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{t} h(t-s)X(s)\mathrm{d}s = a e^{at}\int_{-\infty}^{t} e^{as}X(s)\mathrm{d}s.$$

因为 $$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{j}\omega\tau}R_X(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\sigma^2\int_{-\infty}^{0} e^{(\beta-\mathrm{j}\tau)\omega}\,\mathrm{d}\tau+\sigma^2\int_{0}^{\infty} e^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)\tau}\,\mathrm{d}\tau=\frac{2\sigma^2\beta}{\beta^2+a^2},$$

所以 $$S_Y(\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|^2 S_X(\omega)=\frac{2a^2\sigma^2\beta}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+\beta^2)}.$$

于是 $$R_Y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)e^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2a^2\sigma^2\beta}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+\beta^2)}e^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{a^2\sigma^2\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\mathrm{j}\omega\tau}}{(a^2+\omega^2)(\beta^2+\omega^2)}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{a\sigma^2}{a^2-\beta^2}(a e^{-\beta\tau}-\beta e^{-a\tau}),\ \tau=0.$$

因为 $R_Y(\tau)$ 是偶函数,最后得

$$R_Y(\tau)=\frac{a\sigma^2}{a^2-\beta^2}(a e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-a|\tau|}).$$

例 9 设线性时不变系统的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{\mathrm{j}\omega-\alpha}{\mathrm{j}\omega+\beta}$,输入平稳过程 $X(t)$ 的相关函数 $R_X(\tau)=e^{-a|\tau|}$. 求互相关函数 $R_{YX}(\tau)$.

解 $$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega-\alpha}{\mathrm{j}\omega+\beta}=1-\frac{\alpha+\beta}{\mathrm{j}\omega+\beta}.$$

相应脉冲响应

$$h(\tau)=\delta(\tau)-(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-\beta\tau}u(\tau),$$

互相关函数

$$\begin{aligned}R_{YX}(\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau-v)h(v)\mathrm{d}v\\&=\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(v)-(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-\beta v}u(v)]\mathrm{e}^{-a|\tau-v|}\mathrm{d}v\\&=\mathrm{e}^{-a|\tau|}-(\alpha+\beta)\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta v}\mathrm{e}^{-a|\tau-v|}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

当 $\tau<0$ 时,有

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta v}\mathrm{e}^{-a|\tau-v|}\mathrm{d}v=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta v}\mathrm{e}^{a|\tau-v|}\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{e}^{a\tau}}{\alpha+\beta};$$

当 $\tau\geqslant0$ 时,有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta v}\mathrm{e}^{-a|\tau-v|}\mathrm{d}v&=\int_0^{\tau}\mathrm{e}^{-a\tau}\mathrm{e}^{(a-\beta)v}\mathrm{d}v+\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{e}^{a\tau}\mathrm{e}^{-(a+\beta)v}\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{a-\beta}(\mathrm{e}^{-\beta\tau}-\mathrm{e}^{-a\tau})+\frac{1}{a+\beta}\mathrm{e}^{-\beta\tau}.\end{aligned}$$

综上所述,有

$$R_{YX}(\tau)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{\alpha+\beta}{a+\beta}\right)\mathrm{e}^{a\tau}, & \tau<0,\\ \mathrm{e}^{a\tau}+\dfrac{\alpha+\beta}{a-\beta}(\mathrm{e}^{-\beta\tau}-\mathrm{e}^{-a\tau})+\dfrac{\alpha+\beta}{a+\beta}\mathrm{e}^{-\beta\tau}, & \tau\geqslant0.\end{cases}$$

例 10 设随机过程 $Y(t)$ 满足微分方程

$$Y''(t)+3Y'(t)+2Y(t)=X(t),$$

其中 $X(t)$ 是白噪声,$R_X(\tau)=K\delta(\tau)$. 证明:$R_Y(\tau)$ 满足微分方程

$$R''_Y(\tau)+3R'_Y(\tau)+2R_Y(\tau)=0,$$

方程初始条件是:$R_Y(0)=K/12, R'_Y(0)=0$.

证 对题给方程两边取傅里叶变换,可得

$$Y(\mathrm{j}\omega)[(\mathrm{j}\omega)^2+3\mathrm{j}\omega+2]=X(\mathrm{j}\omega),$$

故其频率响应

$$H(\mathrm{j}\omega)=Y(\mathrm{j}\omega)/X(\mathrm{j}\omega)=1/[(\mathrm{j}\omega)^2+3\mathrm{j}\omega+2].$$

又由 $S_X(\omega)=K$，得

$$S_Y(\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|^2S_X(\omega)=K/[(2-\omega^2)^2+9\omega^2]$$

$$=\frac{K}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{1-\mathrm{j}\omega}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2+\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{2-\mathrm{j}\omega}\right)\right],$$

所以 $R_Y(\tau)=\frac{K}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\tau}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\tau}\right)u(\tau)-\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\tau}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\tau}\right)u(-\tau)\right],$

若取 $\tau>0$，则有 $R_Y(\tau)=\frac{K}{3}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\tau}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\tau}\right).$

可以验证，$R_Y(\tau)$ 满足

$$\begin{cases}R''_Y(\tau)+3R'_Y(\tau)+2R_Y(\tau)=0,\\ R_Y(0)=K/12, \qquad R'_Y(0)=0.\end{cases}$$

例 11 在图 7.10 所示系统中输入 $X(t)$ 同时作用于两个系统.

(1) 求输出 $Y_1(t)$ 与 $Y_2(t)$ 的互谱密度 $S_{Y_1Y_2}(\omega)$；

(2) 设 $X(t)$ 是零均值的具有单位谱高的白噪声，若要使 $Y_1(t)$ 与 $Y_2(t)$ 为不相关过程，$h_1(\tau)$ 与 $h_2(\tau)$ 要满足什么条件？

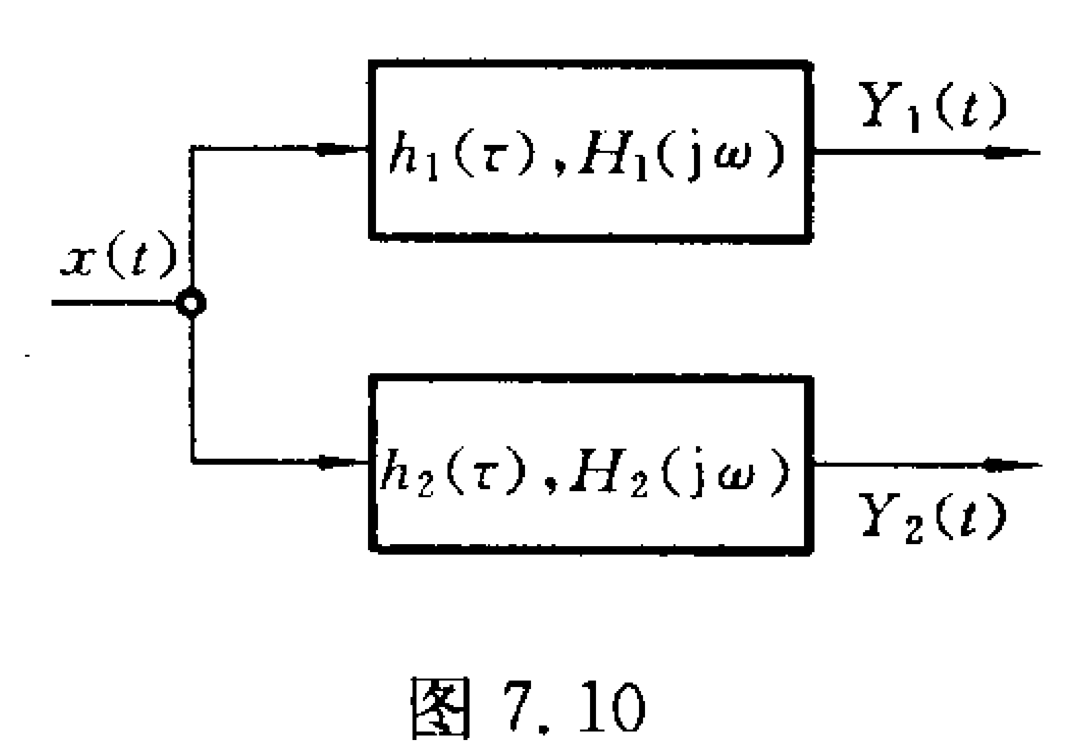


图 7.10

解 (1) 对图 7.10 所示系统，有

$$Y_1(t)Y_2(t-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}Y_1(t)X(t-\tau-u)h_2(u)\mathrm{d}u,$$

$$Y_1(t)X(t-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}X(t-\mathrm{d})X(t-\tau)h_1(\alpha)\mathrm{d}\alpha\ .$$

对上面两个等式的两边分别取期望，得

$$R_{Y_1Y_2}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{Y_1X}(\tau+u)h_2(u)\mathrm{d}u,$$

$$R_{Y_1X}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau-\alpha)h_1(\alpha)\mathrm{d}\alpha\ .$$

故有 $$R_{Y_1Y_2}(\tau) = R_X(\tau) * h_1(\tau) * h_2(-\tau),$$

$$S_{Y_1Y_2}(\omega) = S_X(\omega)H_1(\mathrm{j}\omega)\overline{H_2(\mathrm{j}\omega)}.$$

(2) 要 $Y_1(t)$ 与 $Y_2(t)$ 不相关，应有 $R_{Y_1Y_2}(\tau) = 0$，即 $h_1(t) * h_2(-t) = 0$. 因而在频率域里有 $H_1(\mathrm{j}\omega)H_2(\mathrm{j}\omega) = 0$，即在频域中要求两个频率响应函数的振幅频率特性不相重叠.

例 12 设随机过程满足微分方程

$$\begin{cases} Y'(t) + 2Y(t) = X(t), \\ Y(0) = 1, \end{cases}$$

其中 $X(t)$ 是平稳过程，且 $E[X(t)] = 2, R_X(\tau) = 4 + 2\mathrm{e}^{-|\tau|}$，求 $E[Y(t)], R_{XY}(t_1,t_2)$ 和 $R_Y(t_1,t_2), t_1 > 0, t_2 > 0, t > 0$.

解 设 $E[Y(t)] = m_Y(t)$，对微分方程取期望，得

$$\begin{cases} m'_Y(t) + 2m_Y(t) = m_X = 2, \\ m_Y(0) = 1. \end{cases}$$

解一阶线性常微分方程，得 $m_Y(t) = 1$.

将原方程改写为

$$\begin{cases} Y'(t_2) + 2Y(t_2) = X(t_2), \\ Y(0) = 1, \end{cases}$$

将方程两边乘以 $X(t_1)$ 再取期望值，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t_2}R_{XY}(t_1,t_2) + 2R_{XY}(t_1,t_2) = 4 + 2\mathrm{e}^{-|t_1-t_2|}, \\ R_{XY}(t_1,0) = 1. \end{cases}$$

解上述方程，得

$$R_{XY}(t_1,t_2) = \begin{cases} 2 + \dfrac{2}{3}(\mathrm{e}^{t_2-t_1} - \mathrm{e}^{-t_1-2t_2}), \\ 2 + 2(\mathrm{e}^{t_1-t_2} - \mathrm{e}^{t_1-2t_2}). \end{cases}$$

将原方程改写为

$$\begin{cases} Y'_1(t_1) + 2Y(t_1) = X(t_1), \\ Y(0) = 1, \end{cases}$$

将方程两边乘以 $Y(t_2)$ 再取期望值，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t_1}R_Y(t_1,t_2)+2R_Y(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2),\\ R_Y(0,t_2)=1.\end{cases}$$

解上述方程，得

$$R_Y(t_1,t_2)=\begin{cases}1+\dfrac{2}{3}(e^{t_2-t_1}-e^{-t_1-2t_2}+e^{-2(t_1+t_2)}-e^{t_2-2t_1}), & t_1>t_2,\\ 1+\dfrac{2}{3}(e^{t_2-t_1}-e^{t_1-2t_2}+e^{-2(t_1+t_2)}-e^{-t_2-2t_1}), & t_1<t_2.\end{cases}$$

例 13 设随机序列 $\{X_n\}$ 是一个白噪声序列 $\{W_n\}$ 经图 7.11 所示线性系统所得到的输出，即

$$X_n=aX_{n-1}+W_n,\quad X_0=0,$$

其中 X_0 是初始值. 已知 $\{W_n\}$ 是平稳的，均值为 m_W，方差为 σ_W^2.

(1) 求 $E[X_n]$，并说明在什么条件下 $\{X_n\}$ 是均值平稳的；

(2) 若 $m_W=0$，求 $\mathrm{Cov}(X_n,X_{n-m})$，并说明在什么条件下 $\{X_n\}$ 是宽平稳的；

(3) 若 $m_W=0$，在 $\{X_n\}$ 是宽平稳的条件下，求 $\{X_n\}$ 的相关函数 $R(m)$.

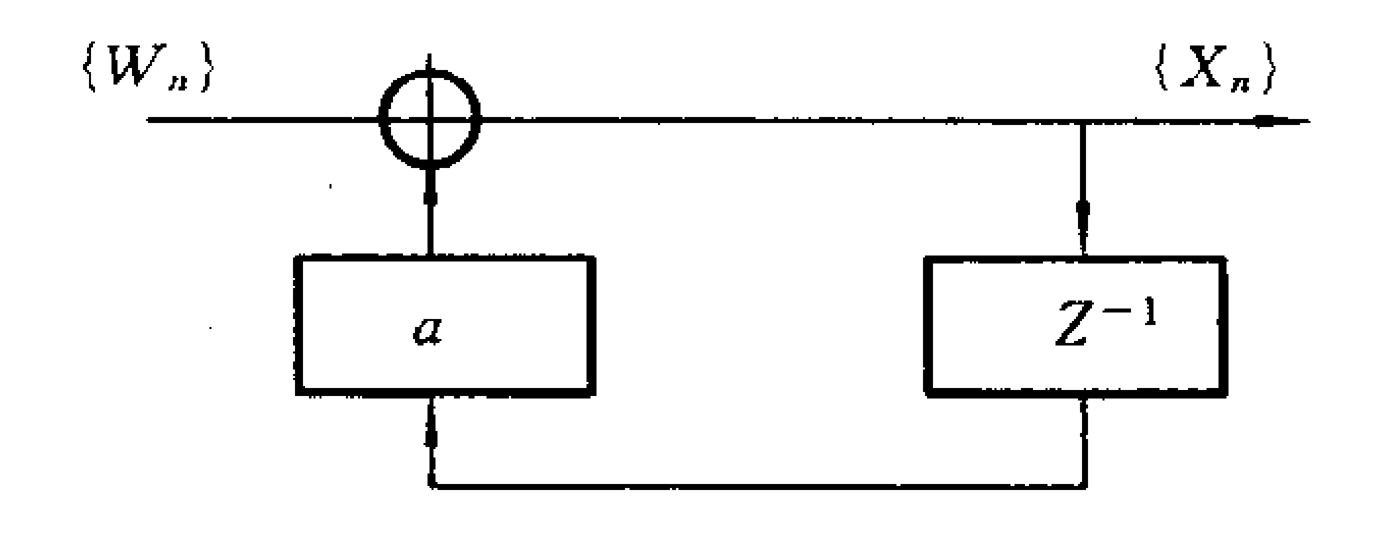


图 7.11

解 (1) 系统的脉冲响应 $h(n)=a^nU(n)$. 输出是

$$X_n=\sum_{m=0}^{\infty}h(m)W(n-m).$$

对上式两边取期望，有

$$E[X_n]=\sum_{m=0}^{\infty}h(m)E[W(n-m)]=\sum_{m=0}^{\infty}a^m m_W.$$

当 $|a|<1$ 时，$\{X_n\}$ 是均值平稳的，且 $E[X_n]=\dfrac{m_W}{1-a}$.

(2) 当 $m_W=0$ 时，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_n,X_{n-m})&=R_X(n,n-m)=E[X(n)X(n-m)]\\&=E\Big[\sum_{k=0}^{\infty}h(k)W(n-k)\sum_{l=0}^{\infty}h(l)W(n-m-l)\Big]\\&=E\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}h(k)h(l)W(n-k)W(n-m-l)\Big]\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}h(k)h(l)R_W(m+l-k).\end{aligned}$$

由于白噪声的相关函数 $R_W(n)=\begin{cases}\sigma_W^2, & n=0,\\ 0, & n\neq 0,\end{cases}$ 所以

$$\mathrm{Cov}(X_n,X_{n-m})=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)h(k-m)\sigma_W^2.$$

当 $m>0$ 时，有

$$\mathrm{Cov}(X_n,X_{n-m})=\sum_{k=0}^{\infty}a^k a^{k-m}\sigma_W^2 U(k-m)=\frac{a^m\sigma_W^2}{1-a^2}.$$

当 $m<0$ 时，有

$$\mathrm{Cov}(X_n,X_{n-m})=\sum_{k=0}^{\infty}a^k a^{k-m}\sigma_W^2=\frac{a^{-m}\sigma_W^2}{1-a^2}.$$

所以，当 $a^2<1$ 时，$\{X_n\}$ 是宽平稳的，且有

$$\mathrm{Cov}(X_n,X_{n-m})=\frac{a^{|m|}\sigma_W^2}{1-a^2}.$$

(3) 依定义可求得 $\{X_n\}$ 的方差，即

$$D[X_n]=E[X_n^2]=R_X(0)=\mathrm{Cov}(X_n,X_n)=\frac{\sigma_W^2}{1-a^2},$$

从而
$$R(m)=\frac{\mathrm{Cov}(X_n,X_{n-m})}{D[X_n]}=a^{|m|}.$$

例 14 设一个随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度 $S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$，求一个可实现的稳定系统 $H(\mathrm{j}\omega)$，使得具有单位谱

高的白噪声 $W(t)$ 输入时，输出过程的功率谱密度恰为 $S_X(\omega)$（此系统被称为成形滤波器），并回答结果是否唯一.

解　因为 $S_X(\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|^2 S_W(\omega)$. 依题意，得

$$|H(\mathrm{j}\omega)|^2=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}=\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)},$$

所以，对应上式可写出其可实现的稳定系统有

$$H_1(\mathrm{j}\omega)=\frac{2+\mathrm{j}\omega}{(3+\mathrm{j}\omega)(1+\mathrm{j}\omega)}=\frac{2+\mathrm{j}\omega}{3+4\mathrm{j}\omega-\omega^2},$$

$$H_2(\mathrm{j}\omega)=\frac{2-\mathrm{j}\omega}{(3+\mathrm{j}\omega)(1+\mathrm{j}\omega)}=\frac{2-\mathrm{j}\omega}{3+4\mathrm{j}\omega-\omega^2}.$$

可知，结果不是唯一的.

例 15　设一个随机过程 $Y(t)$ 的功率谱密度 $S_Y(\omega)=\dfrac{b^2}{a^4+\omega^4}$，求成形滤形器的状态模型.

解　由例 14 可以写出

$$|H(\mathrm{j}\omega)|^2=\frac{b^2}{a^4+\omega^4}=\frac{b^2}{(a^2-\omega^2)^2+2a^2\omega^2},$$

所以，成形滤形器的传递函数（频率响应）是

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{b}{a^2+\sqrt{2}a\mathrm{j}\omega+(\mathrm{j}\omega)^2},$$

与之相应的微分方程是

$$\ddot{X}(t)+\sqrt{2}a\dot{X}(t)+a^2X(t)=bW(t),$$

相应的状态模型为

$$\begin{bmatrix}\dot{X}(t)\\ \ddot{X}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a^2 & -\sqrt{2}a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(t)\\ \dot{X}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ b\end{bmatrix}W(t),$$

$$Y(t)=[1,0]\begin{bmatrix}X(t)\\ \dot{X}(t)\end{bmatrix}.$$

例 16　在图 7.12 所示反馈线性系统中，$n(t)$ 是白噪声，$S_n(\omega)=1$，$X(t)$ 与 $n(t)$ 不相关，即 $R_{xn}(\tau)=0$，设

$$H_0(\mathrm{j}\omega)=\frac{H_b(\mathrm{j}\omega)H_f(\mathrm{j}\omega)}{1+H_a(\mathrm{j}\omega)H_b(\mathrm{j}\omega)H_f(\mathrm{j}\omega)}$$

的傅里叶逆变换为 $h_0(t)$，$Y(t)$ 如图 7.12 所示. 证明：

$$R_{Y_n}(t)=-h_0(\tau).$$

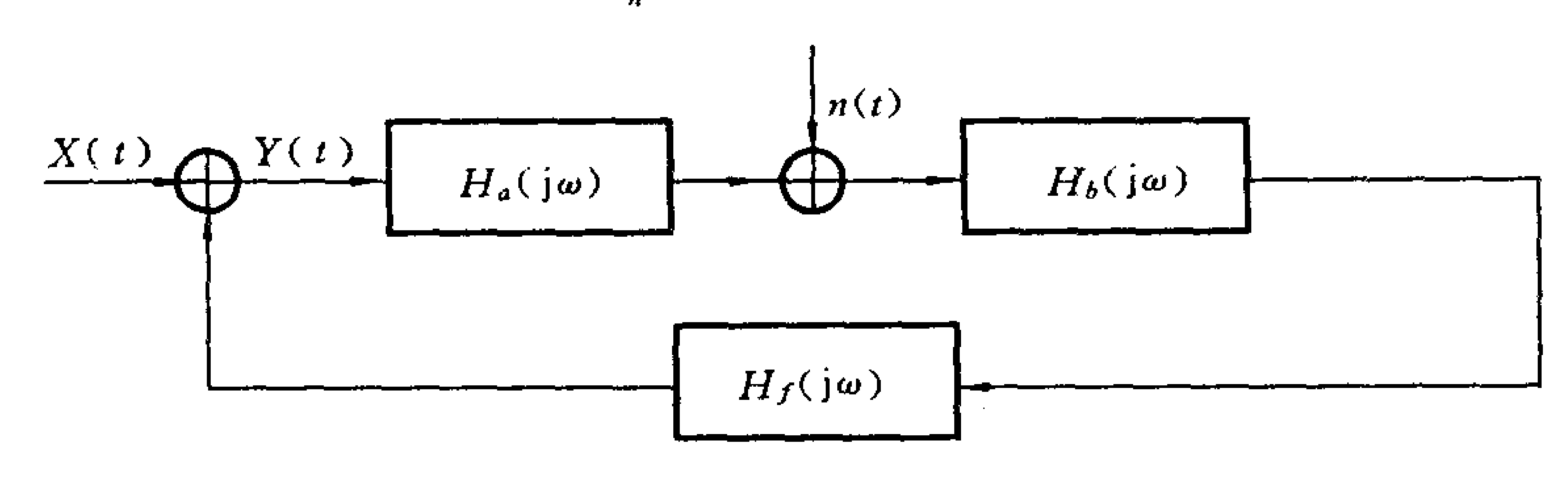


图 7.12

证 依叠加原理，可设

$$Y(t)=Y_n(t)+Y_X(t)=h_1(t)*n(t)+h_2(t)*X(t),$$

而
$$H_1(\mathrm{j}\omega)=\frac{-H_b(\mathrm{j}\omega)H_f(\mathrm{j}\omega)}{1+H_a(\mathrm{j}\omega)H_b(\mathrm{j}\omega)H_f(\mathrm{j}\omega)}=-H_0(\mathrm{j}\omega),$$

$$H_2(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+H_a(\mathrm{j}\omega)H_b(\mathrm{j}\omega)H_f(\mathrm{j}\omega)},$$

$$h_1(t)=\mathscr{F}^{-1}[H_1(\mathrm{j}\omega)]=-h_0(t),$$

$$h_2(t)=\mathscr{F}^{-1}[H_2(\mathrm{j}\omega)],$$

故
$$\begin{aligned}R_{Y_n}(\tau)&=E[Y(t)n(t-\tau)]\\&=E\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty}-h_0(u)n(t-u)\mathrm{d}u\right.\right.\\&\quad\left.\left.+\int_{-\infty}^{\infty}h_2(u)\times(t-u)\mathrm{d}u\right]n(t-\tau)\right\}\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}h_0(u)E[n(t-u)n(t-\tau)]\mathrm{d}u\\&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}h_2(u)E[X(t-u)n(t-\tau)]\mathrm{d}u\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}h_0(u)R_n(\tau-u)\mathrm{d}u+\int_{-\infty}^{\infty}h_2(u)R_{Xn}(\tau-u)\mathrm{d}u\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}h_0(u)\delta(\tau-u)\mathrm{d}u=-h_0(\tau).\end{aligned}$$

第八章　正态(高斯)随机过程

第一节　多维正态随机向量

主 要 内 容

1. 若 $X \sim N(0,1)$，则概率密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$，特征函数为 $\varphi_X(v)=\mathrm{e}^{-v^2/2}$.

若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$，$\varphi_X(v)=\exp\{\mathrm{j}\mu v-\sigma^2 v^2/2\}$.

2. 若 X 是二维标准正态分布的随机变量，则

$$f_X(X)=f_X(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}\right\},$$

$$\varphi_{X_1X_2}(v_1,v_2)=\exp\left\{-\frac{v_1^2+2rv_1v_2+v_2^2}{2}\right\},$$

其中 r 是 x_1,x_2 的相关系数，$|r|<1$.

若 X 是二维正态分布的随机变量，则

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\cdot\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma}\right)^2-2r\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}.$$

$$\varphi_{X_1X_2}(v_1,v_2)=\exp\left\{\mathrm{j}(\mu_1v_1+\mu_2v_2)-\frac{1}{2}(\sigma_1^2v_1^2+2r\sigma_1\sigma_2v_1v_2+\sigma_2^2v_2^2)\right\}.$$

条件分布为

$$f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)=\frac{f_X(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{2|1}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{2|1}^2}(x_1-\mu_{2|1})^2\right\},$$

其中 $\sigma_{2|1}^2 \triangleq \sigma_{22}^2-\frac{\sigma_{21}^2\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}^2}=\sigma_{22}^2-\frac{\sigma_{12}^4}{\sigma_{11}^2}$， $\mu_{2|1}\triangleq\mu_2+\frac{\sigma_{21}^2}{\sigma_{11}^2}(x_1-\mu_1)$.

类似可写出 $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$，$\sigma_{1|2}^2$，$\mu_{1|2}$.

3. 若 X 为 n 维正态分布的随机变量，则

$$\boldsymbol{X}=[X_1,X_2,\cdots,X_n]^{\mathrm{T}}.$$

均值为 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}}$. 协方差矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

是对称矩阵，且具有非负定性.

X 的概率密度函数为

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\boldsymbol{C}|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\right\},$$

特征函数为

$$\varphi_X[t_1,t_2,\cdots,t_n]=\exp\left\{\mathrm{j}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{t}\right\},$$

其中 $$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}=(t_1,t_2,\cdots,t_n).$$

4. 若 n 维正态分布 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{C})$，则 $\boldsymbol{X}$ 的任一子向量 $(X_{k_1},X_{k_2},\cdots,X_{k_m})^{\mathrm{T}}$ $(m\leqslant n)$ 也服从正态分布，$(X_{k_1},X_{k_2},\cdots,X_{k_m})^{\mathrm{T}}$ 的特征函数为

$$\varphi(t_{k_1},t_{k_2},\cdots,t_{k_m})=\exp\left\{\mathrm{j}\tilde{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\mu}}-\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{C}}\tilde{\boldsymbol{t}}\right\},$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{t}}=(t_{k_1},t_{k_2},\cdots,t_{k_m})^{\mathrm{T}}$， $\tilde{\boldsymbol{\mu}}=(\mu_{k_1},\mu_{k_2},\cdots,\mu_{k_m})^{\mathrm{T}}$，

而 $\widetilde{C}$ 是保留 C 的第 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 行和列所得到的 $m \times m$ 矩阵.

5. 设多维正态分布 $\boldsymbol{X}$ 可以表示为 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2]^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{X}_1$ 为前 m 个分量,$\boldsymbol{X}_2$ 为后 l 个分量,则

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(X) &= f_{\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2}(X_1, X_2) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{(m+l)/2}(\det \boldsymbol{P})^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2\end{bmatrix}\right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}(\det \widetilde{\boldsymbol{P}}_{11})^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{P}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)]^{\mathrm{T}}\right. \\
&\quad \left. \cdot \widetilde{\boldsymbol{P}}_1^{-1}[\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{P}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)]\right\} \\
&\quad \cdot \frac{1}{(2\pi)^{l/2}(\det \boldsymbol{P}_{22})^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)\right\},
\end{aligned}
$$

其中 $\quad \widetilde{\boldsymbol{P}}_{11}=\boldsymbol{P}_{11}-\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{P}_{22}^{-1}\boldsymbol{P}_{21}, \quad \det \boldsymbol{P}=\det \widetilde{\boldsymbol{P}}_{11} \cdot \det \boldsymbol{P}_{22},$

$$
\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{P}}_{11}^{-1} & -\widetilde{\boldsymbol{P}}_{11}^{-1}\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{P}_{22}^{-1} \\ -\boldsymbol{P}_{22}^{-1}\boldsymbol{P}_{12}\widetilde{\boldsymbol{P}}_{11}^{-1} & \boldsymbol{P}_{22}^{-1}+\boldsymbol{P}_{22}^{-1}\boldsymbol{P}_{12}^{T}\widetilde{\boldsymbol{P}}_{11}^{-1}\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{P}_{22}^{-1}\end{bmatrix}.
$$

条件分布为

$$
\begin{aligned}
f_{X_1|X_2}(\boldsymbol{X}_1|\boldsymbol{X}_2) &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}(\det \widetilde{\boldsymbol{P}}_{11})^{1/2}} \\
&\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{P}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)\right]^{\mathrm{T}}\right. \\
&\quad \left. \cdot \widetilde{\boldsymbol{P}}_{11}^{-1}[\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{P}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)]\right\}.
\end{aligned}
$$

类似地,有

$$
\begin{aligned}
f_{X_2|X_1}(\boldsymbol{X}_2|\boldsymbol{X}_1) &= \frac{1}{(2\pi)^{l/2}(\det \widetilde{\boldsymbol{P}}_{22})^{1/2}} \\
&\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2-\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{P}_{11}^{-1} \cdot (\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1)]^{\mathrm{T}}\right. \\
&\quad \left. \cdot \widetilde{\boldsymbol{P}}_{22}^{-1}[\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2-\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{P}_{11}^{-1}(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1)]\right\},
\end{aligned}
$$

条件均值为

$$
E[\boldsymbol{X}_1|\boldsymbol{X}_2]=\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{P}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)
$$

$$=E[\boldsymbol{X}_1]+\mathrm{Cov}[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2]\{D[\boldsymbol{X}_2]\}^{-1}\{\boldsymbol{X}_2-E[\boldsymbol{X}_2]\},$$

$$E[\boldsymbol{X}_2|\boldsymbol{X}_1]=\boldsymbol{\mu}_2+\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{P}_{11}^{-1}(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1),$$

条件方差为

$$D[\boldsymbol{X}_1|\boldsymbol{X}_2]=\widetilde{\boldsymbol{P}}_{11}=\boldsymbol{P}_{11}-\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{P}_{22}^{-1}\boldsymbol{P}_{21}$$

$$=D[\boldsymbol{X}_1]-\mathrm{Cov}[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2]\{D[\boldsymbol{X}_2]^{-1}\mathrm{Cov}[\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_1]\},$$

$$D[\boldsymbol{X}_2|\boldsymbol{X}_1]=\widetilde{\boldsymbol{P}}_{22}=\boldsymbol{P}_{22}-\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{P}_{11}^{-1}\boldsymbol{P}_{12}.$$

6. n 维正态随机向量的数字特征可以利用特征函数求出，即

$$E[X_k]=\frac{1}{\mathrm{j}}\frac{\partial\varphi(v_1,v_2,\cdots,v_n)}{\partial t_k}\bigg|_{v_1=v_2=\cdots=v_n=0}=\frac{1}{\mathrm{j}}\mathrm{j}\mu_k=\mu_k,$$

$$E[X_iX_k]=(\mathrm{j})^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t_k\partial t_i}\varphi(v_1,v_2,\cdots,v_n)\bigg|_{v_1=v_2=\cdots=v_n=0}$$

$$=C_{ik}+\mu_i\mu_k,$$

$$E\{[X_k-\mu_k][X_i-\mu_i]\}=E[X_kX_i]-\mu_k\mu_i=C_{ki}.$$

7. n 维正态分布的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立的充要条件是它们两两互不相关.

8. 设 $\boldsymbol{X}$ 是正态分布的随机向量，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的两个子向量，即 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)^{\mathrm{T}}$. 若记

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}_{11},\boldsymbol{C}_{22}$ 是 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 的协方差矩阵，$\boldsymbol{C}_{12}$ 是 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 的互协方差矩阵；$\boldsymbol{C}_{12}=\boldsymbol{C}_{21}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 相互独立的充要条件是 $\boldsymbol{C}_{12}=\boldsymbol{0}$.

9. 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$，$E[\boldsymbol{X}]=\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}}$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{C}$.

(1) 若 $\zeta=\sum_{k=1}^{n}a_kX_k=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则

$$E[\zeta]=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu},\quad D[\zeta]=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{a}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{e}=(e_{jk})$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{\eta}$ 是 $m\times 1$ 的列矩阵，是 $\boldsymbol{X}$ 经线性变换后得到的 m 元的随机向量，则 $\boldsymbol{\eta}$ 的数学期望 $E[\boldsymbol{\eta}]=\boldsymbol{e}\boldsymbol{\mu}$，协方差矩阵为

$$D[\boldsymbol{\eta}]=E\{[\boldsymbol{\eta}-E(\boldsymbol{\eta})][\boldsymbol{\eta}-E(\boldsymbol{\eta})]^{\mathrm{T}}\}$$
$$=E\{\boldsymbol{e}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\}$$
$$=\boldsymbol{e}E[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{eCe}^{\mathrm{T}}.$$

(3)**定理** $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 服从 n 元正态分布 $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{C})$ 的充要条件是它的任何一个线性组合 $\zeta=\sum_{k=1}^{n}a_kX_k=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 服从一元正态分布

$$N\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\mu_k,\sum_{k=1}\sum_{i=1}a_ka_iC_{ki}\right).$$

(4)**定理** 若 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 服从 n 元正态分布 $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{C})$，而 e 为任意 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{eX}$ 服从 m 元正态分布 $N(\boldsymbol{e\mu},\boldsymbol{eCe}^{\mathrm{T}})$.

(5)**推论** 若 $\boldsymbol{X}$ 服从 n 元正态分布 $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{C})$，则存在一个正交变换 $\boldsymbol{U}$，使得 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{UX}$ 是一个具有独立正态分布分量的随机变量，$E(\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{U\mu}$，而其方差分量是矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的特征值.

若矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的秩 $r<n$，则正态分布退化到一个 r 维子空间上.

疑难解析

怎样求多维正态分布的边缘分布？

答 边缘分布也称边沿分布或边际分布. 对于二维正态随机变量 $X=(X_1,X_2)$，边缘分布为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma_1^2}(x_1-\mu_1)^2\right\},$$

$$f_{X_2}(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma_2^2}(x_2-\mu_2)^2\right\}.$$

主要内容 4 中指出，n 维正态随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 的任何一个子向量 $(X_{k_1},X_{k_2},\cdots,X_{k_m})^{\mathrm{T}}$ $(m\leqslant n)$ 也服从正态分布，它们的分布都是 $\boldsymbol{X}$ 的边缘分布. 特别是 $m=1$ 的情形. 若

$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)^{\mathrm{T}}$，则

$$f_{X_2}(\boldsymbol{X}_2)=\int_{R^m}f_{X_1X_2}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{l/2}(\det\boldsymbol{P}_{22})^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)\right\},$$

$$f_{X_1}(\boldsymbol{X}_1)=\int_{R^l}f_{X_1X_2}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{m/2}(\det\boldsymbol{P}_{11})^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{11}^{-1}(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1)\right\}.$$

方法、技巧与典型例题分析

由已知正态分布计算边缘分布、条件分布以及数字特征，主要是积分技巧问题. 而有关的一些证明题一般都可以由定义出发，利用概率论中的等价命题得到.

例 1 设随机变量 X 与 Y 独立，且

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\},$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 因为

$$\varphi(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(Z-x)^2/2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(2x^2-2Zx+Z^2)/2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(x\sqrt{2}-Z/\sqrt{2})^2/2}\mathrm{e}^{-Z^2/4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-Z^2/4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(x\sqrt{2}-Z/\sqrt{2})^2/2}\mathrm{d}x,$$

而 $$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(x\sqrt{2}-Z/\sqrt{2})^2/2}\mathrm{d}x\xlongequal{u=x\sqrt{2}-Z/\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u=1,$$

故 $$\varphi(Z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-Z^2/4}.$$

例 2 设(X_1,X_2)服从正态分布

$$f_X(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

求 X_1 与 X_2 的相关系数,并证明:X_1,X_2 相互独立$\Leftrightarrow X_1$ 与 X_2 的相关系数 $r_{12}=0$.

解 因为 $E[X_1]=\mu_1,E[X_2]=\mu_2,D[X_1]=\sigma_1^2,D[X_2]=\sigma_2^2$,所以

$$C_{12}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)f_X(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}\mathrm{d}x_2\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}-r\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\mathrm{d}x_1.$$

作代换 $u=\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}-r\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right),v=\frac{x_2-\mu_2}{\sigma^2}$,则

$$C_{12}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}uv+r\sigma_1\sigma_2v^2)\exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2}\right\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{r\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v^2\mathrm{e}^{-v^2/2}\mathrm{d}v\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u+\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v\mathrm{e}^{-v^2/2}\mathrm{d}v\int_{-\infty}^{\infty}u\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u=r\sigma_1\sigma_2,$$

故

$$r_{12}=\frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}}\ \sqrt{C_{22}}}=\frac{r\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}=r.$$

证 **必要性** 若 X_1,X_2 相互独立,则

$$f_X(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2).$$

而 $f_{X_1}(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-(x_1-\mu_1)^2/2}$, $f_{X_2}(x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-(x_2-\mu_2)^2/2}$,

因此,要使上式成立,必须 $r=0$.

充分性 若 $r=0$,则 $f_X(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$,故 X_1 与 X_2 相互独立.

例 3 设随机变量 X 与 Y 是联合正态分布,概率密度是

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2xyr}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\right\},$$

求 X 和 Y 取不同符号的概率.

解 X 和 Y 取不同符号的概率是

$$\begin{aligned}P\{XY<0\}&=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\right.\\&\quad\left.\cdot\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2xyr}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

记 $x'=x/\sigma_1,y'=y/\sigma_2$,则

$$\begin{aligned}&P\{XY<0\}\\&=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{x'^2-2rx'y'+y'^2}{2(1-r^2)}\right\}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\\&=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x'-ry'}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2-y'^2\right]\right\}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'.\end{aligned}$$

令 $u=\dfrac{x'-ry'}{\sqrt{1-r^2}},v=y'$,有

$$\begin{aligned}P\{XY<0\}&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{-rv/\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}\right\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\pi/2}^{-\arcsin r}R\exp\left\{-\frac{R^2}{2}\right\}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}R\\&=\frac{1}{\pi}\left(-\arcsin r+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\arcsin r}{\pi},\ |\arcsin r|<\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

例 4 设随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\}+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}g(x)g(y),$$

$$-\infty<x,y<\infty,$$

其中
$$g(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|<\pi,\\ 0, & |x|\geqslant\pi.\end{cases}$$

(1)求边缘分布 $f_X(x),f_Y(y)$;

(2)证明 X 与 Y 不相关,但不独立.

解 (1)由边缘分布定义,有

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\}\mathrm{d}y+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}g(x)\int_{-\pi}^{\pi}\cos y\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.\end{aligned}$$

同理,有
$$f_X(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}.$$

故知 X 与 Y 均服从 $N(0,1)$,但不是联合正态的.

证 (2)因为 $f_{XY}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,所以不独立.

$$\begin{aligned}r=E[XY]&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}ye^{-y^2/2}\mathrm{d}y\\&\quad+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}y\cos y\mathrm{d}y=0,\end{aligned}$$

依定义知,X 与 Y 不相关.

仅当两个正态随机变量是联合正态时,独立与不相关才等价.

例 5 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,用特征函数求 $E[X]$ 和 $D[X]$.

解 因为 X 的特征函数 $\varphi(v)=e^{j\mu v-\sigma^2v^2/2}$,故

$$\varphi'(v)=(\mathrm{j}\mu-\sigma^2 v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\mu v-\sigma^2 v^2/2},$$

$$\varphi''(v)=[(\mathrm{j}\mu-\sigma^2 v)^2-\sigma^2]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\mu v-\sigma^2 v^2/2}.$$

令 $v=0$，则 $\varphi'(0)=\mathrm{j}\mu,\varphi''(0)=(\mathrm{j}\mu)^2-\sigma^2=\mu^2-\sigma^2$，

所以
$$E[X]=-\mathrm{j}(\mathrm{j}\mu)=\mu,$$
$$E[X^2]=(-1)^2\mathrm{j}^2\varphi''(0)=\mu^2+\sigma^2.$$

则
$$D[X]=E[X^2]-\{E[X]\}^2=\sigma^2.$$

例 6 设随机变量 $X\sim N(0,\sigma^2)$，证明：

(1) $E[X^n]=\begin{cases}1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)\sigma^n, & n\text{ 是偶数},\\ 0, & n\text{ 是奇数};\end{cases}$

(2) $E[|X|^n]=\begin{cases}1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)\sigma^{2k}, & n=2k,\\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}2^k k!\ \sigma^{2k+1}, & n=2k+1.\end{cases}$

证 (1) 因为 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi/a}$，

对两边 a 微分 k 次，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2k}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2k+1}}}.$$

再令 $a=1/(2\sigma^2),n=2k$，得

$$E[X^n]=1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)\sigma^n,$$

而
$$E[X^n]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}x^n\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}\mathrm{d}x\xlongequal[\text{奇函数}]{n\text{ 是奇数时}}0,$$

所以
$$E[X^n]=\begin{cases}1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\sigma^n, & n\text{ 是偶数},\\ 0, & n\text{ 是奇数}.\end{cases}$$

(2) 当 n 是偶数时，$E[|X|^n]=E[X^n]$. 当 $n=2k+1$ 是奇数时，因为 $f(x)$ 是偶函数，有

$$E[|X|^n]=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}x^{2k+1}\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}\mathrm{d}x\quad\left(\text{令 }y=\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}2^k\sigma^{2k+1}\int_0^{\infty}y^k\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\xlongequal{\text{分部}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}2^k k!\sigma^{2k+1},$$

其中利用了 $$k!=\int_0^{\infty} y^k e^{-y} dy,$$

所以 $$E[|X|^n]=\begin{cases}1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\sigma^{2k}, & n=2k,\\ \sqrt{2/\pi}2^k k!\sigma^{2k+1}, & n=2k+1.\end{cases}$$

例 7 设随机变量 X 与 Y 是联合正态的

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2xy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\right\},$$

证明：(1) $E[XY]=r\sigma_1\sigma_2$；

(2) $E[X^2Y^2]=(2r^2+1)\sigma_1^2+\sigma_2^2=E[X^2]E[Y^2]+2\{E[XY]\}^2$；

(3) $E[|XY|]=\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}(\cos\alpha+\alpha\sin\alpha)$； $\alpha=\arcsin r, |\alpha|<\frac{\pi}{2}$.

证 利用条件期望求解比较简单. 因为

$$E[g_1(X)g_2(Y)]=E\{g_1(X)E[g_2(Y)|X]\},$$

$$f_{Y|X}(y|x)=f_{XY}(x,y)/f_X(x)$$
$$=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi(1-r^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-r^2)}(y-\frac{r\sigma_2}{\sigma_1}x)^2\right\},$$

所以 $E[Y|X]=\frac{r\sigma_2}{\sigma_1}X$, $E[Y^2|X]=\sigma_2^2(1-r)+\frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}X^2$.

(1) 由条件期望性质，有

$$E[XY]=E\{XE[Y|X]\}=E\left[X\cdot\frac{r\sigma_2}{\sigma_1}X\right]=\frac{r\sigma^2}{\sigma_1}E[X^2]=r\sigma_1\sigma^2.$$

(2) $$E[X^2Y^2]=E\{X^2E[Y^2|X]\}$$
$$=E\left\{X^2\left[\sigma_2^2(1-r^2)+\frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}X^2\right]\right\}$$
$$=\sigma_2^2(1-r^2)E[X^2]+\frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}E[X^4].$$

因为 $E[X^4]=(-j)^4\varphi_X^{(4)}(v)|_{v=0}=3\sigma_1^4$, $E[X^2]=\sigma^2$,

故 $$E[X^2Y^2]=(2r^2+1)\sigma_1^2\sigma_2^2.$$

而 $$E[X^2]E[Y^2]+2E[XY]=(2r^2+1)\sigma_1^2\sigma_2^2,$$

故　$E[X^2Y^2]=(2r^2+1)\sigma_1^2\sigma_2^2=E[X^2]E[Y^2]+2E[XY]$.

(3)先证　$$\frac{\partial E[XY]}{\partial\mu}=E\left[\frac{\mathrm{d}|X|}{\mathrm{d}X}\cdot\frac{\mathrm{d}|Y|}{\mathrm{d}Y}\right],$$

其中　$$\mu=E[XY]-E[X]E[Y].$$

$$\frac{\partial E[|XY|]}{\partial\mu}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|xy|\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi(v_1v_2)}{\partial\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(v_1x+v_2y)}\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因为　$$\varphi(v_1,v_2)=\exp\left\{-\frac{1}{2}[\sigma_1^2v_1^2+2\mu v_1v_2+\sigma_2^2v_2^2]\right\},$$

而　$$\frac{\partial\varphi(v_1,v_2)}{\partial\mu}=-v_1v_2\varphi(v_1,v_2),$$

又因　$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}-v_1v_2\varphi(v_1,v_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(v_1x+v_2y)}\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2=\frac{\partial^2f(x,y)}{\partial x\partial y},$$

所以　$$\begin{aligned}\frac{\partial E[|XY|]}{\partial\mu}&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|xy|\frac{\partial^2f(x,y)}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2|xy|}{\partial x\partial y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=E\left[\frac{\mathrm{d}|X|}{\mathrm{d}X}\cdot\frac{\mathrm{d}|Y|}{\mathrm{d}Y}\right].\end{aligned}$$

而　$$\frac{\mathrm{d}|X|}{\mathrm{d}X}=\begin{cases}1, & X>0,\\-1, & X<0,\end{cases}\quad\frac{\mathrm{d}|Y|}{\mathrm{d}Y}=\begin{cases}1, & Y>0,\\-1, & Y<0,\end{cases}$$

利用例 3 的结果,得

$$P\{XY<0\}=1/2-\alpha/\pi,\quad\alpha=\arcsin r=\arcsin\frac{\mu}{\sigma_1\sigma_2}.$$

$$P\{XY>0\}=1-P[XY<0]=1/2+\alpha/\pi,$$

故 $$E\left[\frac{\mathrm{d}|X|}{\mathrm{d}X}\cdot\frac{\mathrm{d}|Y|}{\mathrm{d}Y}\right]=1\cdot P\{XY>0\}-1\cdot P\{XY<0\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\mu}{\sigma_1\sigma_2}.$$

当 $\mu=0$ 时,X 与 Y 不相关. 由于 X 与 Y 是联合正态的,独立与不相关等价,故

$$E[|XY|]|_{\mu=0} = E[|X|]E[|Y|] = \frac{2}{\pi}\sigma_1\sigma_2.$$

解微分方程 $$\frac{\partial E[|XY|]}{\partial \mu} = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\mu}{\sigma_1\sigma_2}$$

得 $$E[|XY|] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\mu}\arcsin\frac{\mu}{\sigma_1\sigma_2}\mathrm{d}\mu + \frac{2}{\pi}\sigma_1\sigma_2$$
$$= \frac{2}{\pi}\sigma_1\sigma_2(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha),$$

其中 $$\alpha = \arcsin r, \quad |\alpha| < \pi/2.$$

例 8 证明:n 维正态分布的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow X_1, X_2, \cdots, X_n$ 两两互不相关.

证 **必要性** 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的正态随机变量,则必有

$$f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n),$$

$$\varphi_X(v_1, v_2, \cdots, v_n)$$
$$= \varphi_{X_1}(v_1)\varphi_{X_2}(v_2)\cdots\varphi_{X_n}(v_n) = \prod_{i=1}^{n}\exp\left\{\mathrm{j}\mu_i v_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 v_i^2\right\}$$
$$= \exp\left\{\mathrm{j}\sum_{i=1}^{n}\mu_i v_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 v_i^2\right\},$$

其中 $\mu_i = E[X_i], \quad \sigma_i^2 = D[X_i], \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

是协方差矩阵,显然,$i \neq k$ 时,$\boldsymbol{C}_{ik} = 0$,故 X_i 与 X_k 是不相关的.

充分性 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是两两互不相关的正态随机变量,则

$$\boldsymbol{C}_{ki} = E[(X_k - \mu_k)(X_i - \mu_i)] = 0, \ k \neq i,$$

$$\varphi_X(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \exp\left\{\mathrm{j}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}\right\},$$

其中 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{C}$ 为协方差矩阵，因而有

$$\begin{aligned}\varphi_X(v_1,v_2,\cdots,v_n)&=\exp\left\{\mathrm{j}\sum_{i=1}^{n}\mu_i v_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{C}_{ii}v_i^2\right\}\\&=\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{\mathrm{j}\mu_i v_i-\frac{1}{2}\boldsymbol{C}_{ii}v_i^2\right\}=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(v_i),\end{aligned}$$

其中 $\varphi_{X_i}(v_i)$ 是正态随机变量 X_i 的特征函数. 依特征函数性质知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立.

例 9 设 $\boldsymbol{X}$ 是正态分布的随机向量，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的两个子向量，且有 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)^{\mathrm{T}}$. 令

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11}&\boldsymbol{C}_{12}\\\boldsymbol{C}_{21}&\boldsymbol{C}_{22}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}_{11},\boldsymbol{C}_{22}$ 分别是 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 的协方差矩阵，$\boldsymbol{C}_{12}$ 是 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 的互协方差矩阵，$\boldsymbol{C}_{12}=\boldsymbol{C}_{21}^{\mathrm{T}}$，证明：$\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 相互独立 $\Leftrightarrow\boldsymbol{C}_{12}=\mathbf{0}$.

证　必要性　若 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 相互独立，则 $\boldsymbol{X}_1$ 的任一分量与 $\boldsymbol{X}_2$ 的任一分量相互独立，其协方差为零，所以由它们构造成的互协方差矩阵 $\boldsymbol{C}_{12}=\mathbf{0}$.

充分性　若 $\boldsymbol{C}_{12}=\boldsymbol{C}_{21}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{C}_{22}\end{bmatrix}$. 令 $\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{V}_1$ 与 $\boldsymbol{V}_2$ 分别同 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 维数相同，则

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{C}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_1\\\boldsymbol{V}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{11}\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{22}\boldsymbol{V}_2,$$

再令 $\boldsymbol{\mu}=[\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2$ 分别是 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 的均值，则

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}=[\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\\boldsymbol{\mu}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}_2.$$

所以，得到 $\boldsymbol{X}$ 的特征函数

$$\varphi_X(V_1,V_2,\cdots,V_n)=\exp\left\{\mathrm{j}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{V}\right\}$$

$$= \exp\left\{ j(\boldsymbol{V}_1^T\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{V}_2^T\boldsymbol{\mu}_2) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{V}_1^T\boldsymbol{C}_{11}\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2^T\boldsymbol{C}_{22}\boldsymbol{V}_2) \right\}$$

$$= \exp\left\{ j\boldsymbol{V}_1^T\boldsymbol{\mu}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{V}_1^T\boldsymbol{C}_{11}\boldsymbol{V}_1 \right\}\exp\left\{ \boldsymbol{V}_2^T\boldsymbol{\mu}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{V}_2^T\boldsymbol{C}_{22}\boldsymbol{V}_2 \right\}$$

$$= \varphi_{X_1}(\boldsymbol{V}_1)\varphi_{X_2}(\boldsymbol{V}_2),$$

式子 $\varphi_{X_1}(\boldsymbol{V}_1), \varphi_{X_2}(\boldsymbol{V}_2)$ 是子向量 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 的特征函数，依特征函数性质知，$\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 相互独立.

例 10 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, r)$，而 $Z = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} + \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}$，求随机变量 Z 的特征函数 $\varphi_Z(v)$.

解 因为 $\varphi_Z(v) = e^{jvb}\varphi(\frac{v}{\sigma_1}, \frac{v}{\sigma_2})$，依特征函数表示式有

$$\varphi\left(\frac{v}{\sigma_1}, \frac{v}{\sigma_2}\right) = e^{j(\mu_1 v/\sigma_1 + \mu_2 v/\sigma_2)} e^{-(2+2r)v^2/2}, \quad e^{jvb} = e^{-j(\mu_1/\sigma_1 + \mu_2/\sigma_2)v},$$

故
$$\varphi_Z(v) = e^{-(2+2r)v^2} = e^{-(1+r)v^2}.$$

例 11 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是四维零均值的联合正态分布，X_1, X_2, X_3, X_4 的协方差存在，求 $E[X_1X_2X_3X_4]$ 和 $E[X_1^2X_2^2]$，并用协方差表示.

解 因为特征函数

$$\varphi_X(v_1, v_2, v_3, v_4) = \exp\left\{ -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} c_{ki}v_k v_i \right\},$$

设 $u_k = \sum_{i=1}^{4} c_{ki}v_i$，于是

$$\varphi_X(v_1, v_2, v_3, v_4) = \exp\left\{ -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} v_k u_k \right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1}\varphi(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

$$= -\frac{1}{2}[u_1 + v_1c_{11} + v_2c_{21} + v_3c_{31} + v_4c_{41}]\varphi_X(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

$$= -u_1\varphi_X(v_1, v_2, v_3, v_4),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v_2 \partial v_1}\varphi_X(v_1,v_2,v_3,v_4)$$
$$=-\frac{\partial u_1}{\partial v_2}\varphi_X(v_1,v_2,v_3,v_4)-u_1\frac{\partial}{\partial v_2}\varphi_X(v_1,v_2,v_3,v_4)$$
$$=-c_{12}\varphi_X(v_1,v_2,v_3,v_4)+u_1u_2\varphi_X(v_1,v_2,v_3,v_4),$$
$$\frac{\partial^3}{\partial v_3 \partial v_2 \partial v_1}\varphi_X(v_1,v_2,v_3,v_4)$$
$$=-c_{12}(-u_3)\varphi_X(v_1,v_2,v_3,v_4)+c_{13}u_2\varphi_X(v_1,v_2,v_3,v_4)$$
$$+c_{23}u_1\varphi_X(v_1,v_2,v_3,v_4)-u_1u_2u_3\varphi_X(v_1,v_2,v_3,v_4)$$
$$=(c_{12}u_3+c_{13}u_2+c_{23}u_1-u_1u_2u_3)\varphi_X(v_1,v_2,v_3,v_4),$$
$$\frac{\partial^4}{\partial v_4 \partial v_3 \partial v_2 \partial v_1}\varphi_X(v_1,v_2,v_3,v_4)$$
$$=(c_{12}c_{34}-c_{12}u_3u_4+c_{13}c_{24}-c_{13}u_2u_4+c_{23}c_{14}$$
$$-c_{23}u_1u_4-c_{14}u_2u_3-c_{24}u_1u_3-c_{34}u_1u_2+u_1u_2u_3)$$
$$\cdot\varphi_X(v_1,v_2,v_3,v_4).$$

令 $$v_1=v_2=v_3=v_4=0,$$

则 $$\varphi(0,0,0,0)=1,\quad u_k=0,\quad k=1,2,3,4,$$

所以

$$E[X_1X_2X_3X_4]$$
$$=(\mathrm{j})^{-4}(C_{12}C_{34}+C_{13}C_{24}+C_{23}C_{14})$$
$$=E[X_1X_2]E[X_3X_4]+E[X_1X_3]E[X_2X_4]+E[X_2X_3]E[X_1X_4].$$

在上式中,令 $X_1=X_3, X_2=X_4$,即得

$$E[X_1^2X_2^2]=2C_{12}^2+C_{11}C_{22}.$$

例 12 设 n 维随机向量服从标准正态分布 $N(\mathbf{0},\boldsymbol{I})$,即 $\boldsymbol{X}$ 的均值向量 $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}$,协方差矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$,构造随机变量 $Z=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$,其中 $\boldsymbol{B}$ 为正定对称矩阵,证明:$\varphi_Z(v)=\prod_{k=1}^{n}(1-2\mathrm{j}v\lambda_k)^{-1/2}$. 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

证 因为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$,所以存在正交阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$,使得

$$P^{-1}BP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值. 令

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PY},$$

则 $$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = [Y_1, Y_2, \cdots, Y_n]^{\mathrm{T}}.$$

有 $$E[\boldsymbol{Y}] = E[\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}E[\boldsymbol{X}] = 0,$$

$$E[\boldsymbol{YY}^{\mathrm{T}}] = E[\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{XX}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}E[\boldsymbol{XX}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{IP} = \boldsymbol{I},$$

所以 $\boldsymbol{Y}$ 服从正态分布 $N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$，即 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 相互独立且都服从 $N(0,1)$. 特征函数

$$\varphi_Z(v) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}vZ}] = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}v\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}}] = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}v\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BPY}}] = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}v\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda Y}}]$$

$$= E\left[\exp\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}v\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Y_i^2}\right\}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}v\lambda_i Y_\lambda^2}\},$$

其中 $$E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}v\lambda_i Y_i^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}v\lambda_i y_i^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y_i^2/2} \mathrm{d}y_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(1 - 2\mathrm{j}\,v\lambda_i)y_i^2\right\} \mathrm{d}\,y_i$$

$$= (1 - 2\mathrm{j}\,v\lambda_i)^{-1/2}.$$

于是 $$\varphi_Z(v) = \prod_{i=1}^{n}(1 - 2\mathrm{j}\,v\lambda_i)^{-1/2}.$$

第二节　高斯随机过程的概念

主 要 内 容

1. 如果随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的有限维分布都是正态分布，则称为**正态过程或高斯(Gauss)随机过程**. 正态过程是二阶矩过

程的一个重要子类.

2. 正态过程的概率密度(矩阵形式)是

$$f_X(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \mid \boldsymbol{C} \mid^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\right\},$$

其中 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^{\mathrm{T}},$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mu_i = E[X_i],$$

$$\begin{aligned} C_{ik} &= E\{[X(t_i) - \mu(t_i)][X(t_k) - \mu(t_k)]\} \\ &= R_X(t_i, t_k) - \mu(t_i)\mu(t_k). \end{aligned}$$

特征函数 $$\varphi_X(\boldsymbol{v}) = \exp\left\{\mathrm{j}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}\right\},$$

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}.$$

对于正态过程来说,宽平稳过程与实平稳过程是等价的.

3. **定理** 若 $\boldsymbol{X}^n = (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \cdots, X_n^{(n)})^{\mathrm{T}}$ 是 k 维实正态随机向量,又 $\boldsymbol{X}^{(n)}$ 均方收敛于 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$,即对于每个分量 $X_i^{(n)}$,有 $\lim E[\mid X_i^{(n)} - X_i \mid^2] = 0$,则 $\boldsymbol{X}$ 也是正态分布的随机向量.

4. **定理** 若正态过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在 T 上是均方可导的,则 $\{X'(t), t \in T\}$ 也是正态过程.

5. **定理** 若正态过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在 T 上是均方可导的,则

$$Y(t) = \int_a^t X(t)\mathrm{d}u, \quad Y(t) = \int_a^b X(u)h(t,u)\mathrm{d}u \quad (a, t, b \in T)$$

都是正态过程.

疑 难 解 析

1. 为什么正态过程是二阶矩过程?

答 因为,正态过程 $X(t)$ 的联合概率密度

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n D}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}\exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}D_{ik}\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\frac{x_k-\mu_k}{\sigma_k}\right\},$$

其中 $$\mu_i=E[X(t_i)],\quad \sigma_i^2=D[X(t_i)],$$

而 $$D=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix},\quad 且\quad r_{ik}=r_{ki},r_{ii}=1.$$

其中，相关系数

$$r_{ik}=\frac{E\{[X(t_i)-\mu_i][X(t_k)-\mu_k]\}}{\sigma_i\sigma_k},$$

D_{ik} 是 D 中元素 r_{ik} 的代数余子式. 所以，正态过程的概率密度仅取决于其一阶矩与二阶矩，从而正态过程是二阶矩过程.

2. 怎样认识复正态过程?

答 对复正态过程而言，其 n 个抽样得到 n 个复随机变量 $Z_{i_k}=X_{t_k}+\mathrm{j}Y_{t_k}(t_k\in T,k=1,2,\cdots,n)$. X_{t_k},Y_{t_k} 都是实随机变量，即 n 个抽样得到 $2n$ 维实正态分布的随机向量，故第一节的所有结果都适用于复正态过程.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设线性系统的脉冲函数是 $h(t)$，输入 $X(t)$ 是平稳实正态过程. 设其输出为随机过程 $Y(t)$. 证明：$X(t),Y(t)$ 是联合正态分布的随机过程.

证 $$Y(t)=\int_{-\infty X}^{\infty}h(t-\tau)X(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$Y(t)$ 是正态分布的实随机过程. 设 $Z=\int_{-\infty X}^{\infty}g(t)X(t)\mathrm{d}t$，其中

$g(\cdot)$ 是任意函数，Z 是正态分布的线性组合，所以 Z 是正态分布的随机变量. 定义

$$g(t)=g_1(t)+\int_{-\infty X}^{\infty} g_2(u)h(u-t)\mathrm{d}u,$$

则

$$\begin{aligned}Z&=\int_{-\infty X}^{\infty} g_1(t)X(t)\mathrm{d}t+\int_{-\infty X}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_2(u)h(u-t)\mathrm{d}uX(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)X(t)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(t)h(u-t)\mathrm{d}tg_2(u)\mathrm{d}u\\&=\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)X(t)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty} Y(u)g_2(u)\mathrm{d}u\\&=\int_{-\infty}^{\infty}(g_1(t),g_2(t))\begin{pmatrix}X(t)\\Y(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 $g(t),g_1(t),g_2(t)$ 都是任意函数，而 Z 是正态分布的随机变量，所以 $(X(t),Y(t))^{\mathrm{T}}$ 是联合正态分布的随机变量.

例 2 设 $\{X(t),t\in[a,b]\}$ 是正态过程，$g_1(t),g_2(t)$ 是两个任意的非零实函数，令

$$Y_1=\int_a^b g_1(t)X(t)\mathrm{d}t,\quad Y_2=\int_a^b g_2(t)X(t)\mathrm{d}t,$$

证明：Y_1 与 Y_2 是联合正态的.

证 显然，Y_1 与 Y_2 都是正态的. 取任意非零常数 k_1 和 k_2，令 $Z=k_1Y_1+k_2Y_2$，则

$$\begin{aligned}Z&=k_1\int_a^b g_1(t)X(t)\mathrm{d}t+k_2\int_a^b g_2(t)X(t)\mathrm{d}t\\&=\int_a^b[k_1g_1(t)+k_2g_2(t)]X(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)X(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

故 Z 是正态的. 于是，$Y_1(t)$ 与 $Y_2(t)$ 是联合正态的.

例 3 说明正态过程在任意一组时间 $t_1,t_2,\cdots,t_k$ 的集合所组成的样本都是联合正态向量.

解 定义 $\boldsymbol{X}=(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_k))^{\mathrm{T}}$ 是一个 k 维向量. 若 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 对任何 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}$ 是正态的，则命题成立.

因为任一 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}$ 可划分为

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}}),$$

其中 $\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}$ 是 $1 \times N$ 维向量,而任一 $\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}$ 可划分为

$$\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}} = (g_{i1}, g_{i2}, \cdots, g_{iN}),\ i = 1,2,\cdots,k,$$

故
$$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}(t_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{N} g_{ij} X_j(t_i).$$

设
$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(t) = g_1(t), g_2(t), \cdots, g_N(t),$$

其中
$$g_i(t) = \sum_{j=1}^{k} g_{ij} \delta(t - t_1),$$

则
$$\int_{T_1}^{T_2} \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(t) \boldsymbol{X}(t) \mathrm{d}t$$
$$= \int_{T_1}^{T_2} \sum_{j=1}^{N} g_j(t) X_{\mathrm{j}}(t) \mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{k} g_{ij} \delta(t - t_1) X_j(t) \mathrm{d}t$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{k} g_{ij} X_j(t_i) = \boldsymbol{Z}.$$

即知 $\boldsymbol{Z}$ 是 $X(t_i)$ 的线性组合,所以是联合正态的.

例 4 设有随机过程 $X(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t$,式中 ω 是常数,U,V 是相互独立的正态随机变量,且均值都是零,方差都是 σ^2. 求 $X(t)$ 的一维与二维概率密度.

解 由题设知,$X(t)$ 是正态随机过程,因此需先求出其前两阶矩.

$$\mu_X(t) = E[U]\cos\omega t + E[V]\sin\omega t = 0,$$

$$\sigma_X^2(t) = E[X^2(t)]$$
$$= E[U^2]\cos^2\omega t + E[V^2]\sin^2\omega t + 2E[UV]\sin\omega t\cos\omega t = \sigma^2,$$

所以一维概率密度 $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$.

又
$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1(t), \mu_2(t)]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} E[X^2(t_1)] & E[X(t_1)X(t_2)] \\ E[X(t_2)X(t_1)] & E[X^2(t_1)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\omega\tau \\ \cos\omega\tau & 1 \end{bmatrix}\sigma^2,$$

所以二维概率密度

$$f_X(x_1,x_2;\tau)=\frac{1}{2\pi\mid \boldsymbol{C}\mid^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}[x_1,x_2]\boldsymbol{C}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right\}.$$

例 5 设 $X(t)$ 是均方可微的平稳正态过程，相关函数 $R_X(\tau)$. 求随机过程 $Y(t)=[X(t+\varepsilon)-X(t)]/\varepsilon$ 的一维概率密度 $f_X(x)$，并证明：当 $\varepsilon\to 0$ 时，$f_Y(y)$ 趋向于均值为零，方差为 $-R''_X(0)$ 的正态分布.

解 显然，$Y(t)$ 是正态随机变量，有

$$\mu_Y(t)=E[Y(t)]=\frac{1}{\varepsilon}\{E[X(t+\varepsilon)-X(t)]\}=0,$$

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2(t)&=E[Y^2(t)]\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\{E[X^2(t+\varepsilon)]+E[X^2(t)]-2E[X(t+\varepsilon)X(t)]\}\\&=\frac{2}{\varepsilon^2}[R_X(0)-R_X(\varepsilon)],\end{aligned}$$

则 $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi[R_X(0)-R_X(\varepsilon)]/\varepsilon^2}}\exp\left\{-\dfrac{\varepsilon^2y^2}{4[R_X(0)-R_X(\varepsilon)]}\right\}.$

证 $R_X(\tau)$ 是偶函数，所以 $R_X(0)=0$，于是

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2[R_X(0)-R_X(\varepsilon)]}{\varepsilon^2}&\overset{\mathrm{L}'}{=}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-R'_X(\varepsilon)}{\varepsilon}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}-R''_X(\varepsilon)=-R''_X(0),\end{aligned}$$

即 $$f_Y(y)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi[-R''_X(0)]}}\exp\left\{\frac{y^2}{2R''_X(0)}\right\}.$$

说明当 $\varepsilon\to 0$ 时，$f_Y(y)$ 趋向于均值为零、方差为 $-R''_X(0)$ 的正态分布.

例 6 设 $X(t)$ 是均值为零，相关函数 $R_X(\tau)=\mathrm{e}^{-|\tau|}$ 的平稳正态过程. 令 $Y=\int_0^1 X(t)\mathrm{d}t$，求随机变量 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 因为 Y 一定是正态随机变量，有

$$E[Y]=E\left[\int_0^1 X(t)\mathrm{d}t\right]=\int_0^1 E[X(t)]\mathrm{d}t=0,$$

$$E[Y^2]=E\left[\left(\int_0^1 X(t)\mathrm{d}t\right)^2\right]=\int_0^1\int_0^1 E[X(t)X(\tau)]\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^1\int_0^1 \mathrm{e}^{-|t-\tau|}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau=\int_0^1\left[\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau+\int_t^1 \mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t=2\mathrm{e}^{-1},$$

所以 $$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\mathrm{e}^{-1}}}\exp\left\{-\frac{y^2}{4\mathrm{e}^{-1}}\right\}.$$

例 7 设 X 和 Y 是均值为零、方差为 σ^2 的独立随机变量. 令 $Z(t)=X\cos 2\pi t+Y\sin 2\pi t$.

(1) 求随机变量 $R=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度 $f_R(r)$;

(2) 在 $t=0$, $1/4$, $1/2$ 取样,写出样本的联合概率密度.

解 (1) 因为由概率论知

$$F_R(r)=P\{R\leqslant r\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant r\}$$

$$=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\leqslant r} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\int_0^r \frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^r \frac{r}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}r,$$

所以 $$f_R(r)=F'_R(r)=\begin{cases}\dfrac{r}{\sigma^2}\exp\left\{-\dfrac{r}{2\sigma^2}\right\}, & r\geqslant 0,\\ 0, & r<0,\end{cases}$$

由此知 $R=\sqrt{X^2+Y^2}$ 服从瑞利分布 .

(2) 因为样本是 $Z(0)=X, Z(1/2)=-X, Z(1/4)=Y$,所以 $Z(0)$ 与 $Z(1/4)$ 相互独立, $Z(1/2)=-X=-Z(0)$.

类似例 4,可求得

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

故 $$f(z_1,z_2,z_3)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2\sigma^2}\right\}\delta(z_1+z_3).$$

例 8 设 $X(t)$ 是一个均值为零的正态过程，相关函数是 $R_X(\tau)$. 设输出过程是 $Y(t)=X^2(t)$，求 $R_Y(\tau)$，μ_Y，σ_Y^2 和 $f_Y(y)$.

解 $R_Y(\tau)=E[Y(t)Y(t-\tau)]=E[X^2(t)X^2(t-\tau)]$，由第一节例 7 知 $E[X^2Y^2]=E[X^2]E[Y^2]+2\{E[XY]\}^2$，而 $X(t)$ 与 $X(t-\tau)$ 是联合正态的，故

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E[X^2(t)]E[X^2(t-\tau)]+2\{E[X(t)X(t-\tau)]\}^2\\&=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau).\end{aligned}$$

而
$$\mu_Y=E[Y(t)]=E[X^2(t)]=R_X(0),$$
$$\sigma_Y^2=R_Y(0)-\mu_Y^2=2R_X^2(0).$$

由于
$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2R_X(0)}\right\},$$

故
$$\begin{aligned}f_Y(y)&=f_X(\sqrt{y})\mid(\sqrt{y})'\mid+f_X(-\sqrt{y})\mid(-\sqrt{y})'\mid\\&=\left[\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})+\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y})\right]U(y)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)y}}\exp\left\{-\frac{y}{R_X(0)}\right\}U(y).\end{aligned}$$

例 9 设 $X(t)$ 是一个均值为零的正态过程，相关函数是 $R_X(\tau)$，设输出 $Z(t)=\mid X(t)\mid$. 求 $R_Z(z)$，μ_Y，σ_Z^2 和 $f_Z(z)$.

解 $R_Z(z)=E[Z(t)Z(t-\tau)]=E[\mid X(t)\mid\cdot\mid X(t-\tau)\mid]$. 因为对于联合正态的两个随机变量 X 和 Y，当它们都有零均值和方差 σ^2 且相关系数为 r 时，由第一节例 7 得

$$E[\mid X\mid\cdot\mid Y\mid]=\frac{2}{\pi}\sigma_X\sigma_Y(\cos\alpha+\alpha\sin\alpha),$$

其中
$$\alpha=\arcsin r,\ \mid\alpha\mid\leqslant\pi/2.$$

所以由
$$\sigma_X^2=E[X^2(t)]=R_X(0),$$
$$r=\frac{E[X(t)X(t-\tau)]}{\sqrt{E[X^2(t)]E[X^2(t-\tau)]}}=\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)},$$

得
$$R_Z(\tau)=\frac{2}{\pi}R_X(\tau)(\cos\alpha+\alpha\sin\alpha),$$

其中 $$\alpha=\arcsin\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)},\ |\alpha|\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

由于 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2R_X(0)}\right\},$$

所以 $$\mu_Z=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2R_X(0)}\right\}\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{2R_X(0)/\pi},$$

$$E[Z^2(t)]=R_Z(0)=\frac{2R_X(0)}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)=R_X(0),$$

$$\sigma_Z^2=E[Z^2(t)]-\mu_Z^2=(1-2/\pi)R_X(0).$$

于是 $$f_Z(z)=[f(z)+f_X(-z)]U(z)$$

$$=\frac{z}{\sqrt{2\pi R_X(0)}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2R_X(0)}\right\}U(z).$$

例 10 二极管的电压 $X(t)$ 是零均值的平稳正态过程，相关函数是 $R_X(t)=c\mathrm{e}^{-a|\tau|}$，产生的电流是 $Y(t)=I\mathrm{e}^{aX(t)}$，求 $\mu_Y(t)$，$\sigma_Y^2(t)$，$S_Y(\omega)$.

解 因为 $\mu_X=0,\quad \sigma_X^2=R_X(0)=c,$

所以 $$f_X(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi c}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2c}\right\}.$$

而 $$\mu_Y(t)=E[I\mathrm{e}^{aX(t)}]=\int_{-\infty}^{\infty}I\mathrm{e}^{ax}\frac{1}{\sqrt{2\pi c}}\mathrm{e}^{-x^2/(2c)}\mathrm{d}x=I\mathrm{e}^{ca^2/2},$$

$$E[Y^2]=E[I^2\mathrm{e}^{2aX(t)}]=I^2\mathrm{e}^{c(2a)^2/2}=I^2\mathrm{e}^{2ca^2},$$

$$\sigma_Y^2=E[Y^2]-\{E[Y]\}^2=I^2\mathrm{e}^{2ca^2}-I^2\mathrm{e}^{ca^2}=I^2\mathrm{e}^{ca^2}(\mathrm{e}^{ca^2}-1).$$

由于 $$R_Y(\tau)=E[Y(t+\tau)Y(t)]=E[I\mathrm{e}^{aX(t+\tau)}\cdot I\mathrm{e}^{aX(t)}]$$

$$=I^2E[\mathrm{e}^{aX(t+\tau)+aX(t)}]=I^2\varphi_X\left(\frac{a}{\mathrm{j}},\frac{a}{\mathrm{j}};\tau\right)$$

而特征函数

$\varphi_X(v_1,v_2;\tau)$

$$= \exp\left\{ \mathrm{j}\sum_{i=1}^{2} v_i\mu_X - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}[R_X(\tau_{ik}) - \mu_X]v_i v_k \right\}$$

$$= \exp\left\{ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} R_X(\tau_{ik}) v_i v_k \right\},$$

其中 $$\tau_{ik} = \begin{cases} 0, & i = k, \\ \tau, & i \neq k, \end{cases} \quad i,k = 1,2.$$

所以 $$R_X(\tau) = I^2 \exp\{a^2 c + a^2 R_X(\tau)\}.$$

将 $R_X(\tau)$ 展开成泰勒级数，得

$$R_X(\tau) = I^2 \mathrm{e}^{ca^2}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k}}{k!} c^k \mathrm{e}^{-ak|\tau|}\right],$$

于是，得到 $Y(t)$ 的功率谱密度

$$S_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$= I^2 \mathrm{e}^{ca^2}\left[2\pi\delta(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k}c^k}{k!} \cdot \frac{2ak}{\omega^2 + a^2 k^2}\right].$$

例 11 设 $X(t)$ 是正态过程，有相关函数 $R_X(\tau)$，证明：若

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T R_X^2(\tau)\mathrm{d}\tau = 0,$$

则 $$E[X^2(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)\mathrm{d}t.$$

证 设 $Y(t) = X^2(t)$，即证 $Y(t)$ 是遍历的，有

$$R_Y(\tau) = R_X^2(\tau) + 2R_X^2(0), \quad \mu_Y^2 = R_Y(\infty) = 2R_X^2(0).$$

而由均值的各态历经性充要条件，要

$$E[Y(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} Y(t)\mathrm{d}t,$$

必须 $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{2T} (1 - \frac{\tau}{2T})[R_Y(\tau) - \mu_Y^2]\mathrm{d}\tau = 0,$$

即 $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{2T} (1 - \frac{\tau}{2T})[R_X^2(\tau) + 2R_X^2(0) - 2R_X^2(0)]^2\mathrm{d}\tau$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{2T} (1 - \frac{\tau}{2T})R_X^2(\tau)\mathrm{d}\tau = 0.$$

由题给条件，有

$$0 \leqslant \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{2T} (1-\frac{\tau}{2T})R_X^2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant 2\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^{2T} R_X^2(\tau)\mathrm{d}\tau = 0.$$

故必要条件成立. 所以 $Y(t)$ 是各态历经的，有

$$E[X^2(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)\mathrm{d}t.$$

第三节　窄带平稳实正态随机过程

主 要 内 容

一、窄带平稳正态过程

1. 如果系统在中心频率 f_0 的附近很窄的范围内通频带 $\Delta f \leqslant f_0$ 异于零，则称系统为**窄带系统**.

设有窄带随机过程 $X(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \Phi(t)]$，可表示为

$$X(t) = A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t,$$

其中 $A_c(t) = A(t)\cos\Phi(t)$，　　$A_s(t) = A(t)\sin\Phi(t)$.

$$A(t) = [A_c^2(t) + A_s^2(t)]^{1/2},\quad \Phi(t) = \arctan\frac{A_s(t)}{A_c(t)}.$$

$A(t)$ 称为窄带过程的**包络**，$\Phi(t)$ 称为窄带过程的**相位**.

其统计特征是:

(1) $R_c(\tau) = R_X(\tau)\cos\omega_0\tau + \widehat{R}_X(\tau)\sin\omega_0\tau$,

$R_s(\tau) = R_X(\tau)\cos\omega_0\tau + \widehat{R}_X(\tau)\sin\omega_0\tau$.

$\widehat{x}(t)$ 是实值函数 $x(t)$ 的复形式 $\widehat{x}(t) = x(t) + \mathrm{j}\widehat{x}(t)$ 的虚部.

$$R_c(\tau) = R_s(\tau),\quad \widehat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau.$$

(2) $R_{cs}(\tau)=R_X(\tau)\sin\omega_0\tau-\widehat{R}_X(\tau)\cos\omega_0\tau$,

$$R_{sc}(\tau)=-R_X(\tau)\sin\omega_0\tau+\widehat{R}_X(\tau)\cos\omega_0\tau,$$

$$R_{cs}(\tau)=-R_{sc}(\tau)=-R_{cs}(-\tau).$$

(3) 在同一时刻　$R_{cs}(0)=0.$

(4) 功率谱密度

$$G_{cs}(\omega)=-G_{sc}(\omega)$$

$$=\begin{cases}-\mathrm{j}[G_X(\omega-\omega_0)-G_X(\omega+\omega_0)], & |\omega|\leqslant\omega_0,\\ 0, & |\omega|>\omega_0.\end{cases}$$

$$G_X(\omega)=\frac{1}{2}[G_c(\omega-\omega_0)+G_c(\omega+\omega_0)]$$

$$=\frac{1}{2}[G_s(\omega-\omega_0)+G_s(\omega+\omega_0)],\ |\omega|<\omega_0,$$

$$G_c(\omega)=G_s(\omega)$$

$$=\begin{cases}G_X(\omega-\omega_0)+G_X(\omega+\omega_0), & |\omega|<\omega_0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

2. 设$\{X(t),t\in \mathrm{T}\}$是均值为零的窄带平稳正态过程，

$$X(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\Phi(t)]$$

可表示为　$X(t)=X_c(t)\cos\omega_0 t-X_s(t)\sin\omega_0 t$,

其中$X_c(t)$和$X_s(t)$是两正交分量，均是正态的，且是联合正态的.

$$E[X_c(t)]=E[X_s(t)]=0,\quad \sigma_{X_c}^2=\sigma_{X_s}^2=\sigma_X^2,$$

$$R_{X_c}(0)=R_{X_s}(0)=R_X(0),\quad R_{cs}(0)=E[X_c(t)X_s(t)]=0.$$

两正交分量的联合密度为

$$f(x_c,x_s)=f(x_c)f(x_s)=\frac{1}{2\pi\sigma_X^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_X^2}(x_c^2+x_s^2)\right\}.$$

这里 $X_c^2+X_s^2=A^2$.

3. 包络的一维分布密度是

$$f(A)=\int_0^{2\pi}f(A,\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{A}{\sigma_X^2}\exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma_X^2}\right\},\quad A\geqslant 0,$$

相位的一维分布密度是

$$f(\varphi)=\int_0^{\infty} f(A,\varphi)\mathrm{d}A=\frac{1}{2\pi},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

可见,窄带正态过程的包络服从瑞利分布,相位服从$(0,2\pi)$内的均匀分布.

因为$f(A,\varphi)=f(A)f(\varphi)$,所以$A(t)$与$\Phi(t)$是相互独立的.还有

$$E[A(t)]=\sqrt{\pi/2}\sigma_X,\quad E[A^2(t)]=2\sigma_X^2,\quad \sigma_A^2(t)=(2-\pi/2)\sigma_X^2.$$

4. 因为包络和相位的二维密度

$$f(A_1,A_2;\Phi_1,\Phi_2)=\begin{cases}\dfrac{A_1A_2}{4\pi^2\,|\boldsymbol{C}|^{1/2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\,|\boldsymbol{C}|^{1/2}}[\sigma_X^2(A_1^2+A_2^2)\right.\\ \left.-2a(\tau)A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)]\right\},\ A_1,\ A_2\geqslant 0,0\leqslant\varphi_1,\varphi_2\leqslant 2\pi\\ 0,\ 其它,\end{cases}$$

其中 $a(\tau)=R_{xc}(\tau)=R_{xs}(\tau),\quad \tau=t_2-t_1.$

所以包络的二维密度为

$$f(A_1,A_2)=\begin{cases}\dfrac{A_1A_2}{|\boldsymbol{C}|^{1/2}}I_0\left(\dfrac{A_1A_2a(\tau)}{|\boldsymbol{C}|^{1/2}}\right)\exp\left\{-\dfrac{\sigma_Y^2(A_1^2+A_2^2)}{2\,|\boldsymbol{C}|^{1/2}}\right\},\ A_1,A_2\geqslant 0,\\ 0,\qquad 其它,\end{cases}$$

相位的二维密度为

$$f(\varphi_1,\varphi_2)=\begin{cases}\dfrac{|\boldsymbol{C}|^{1/2}}{\pi^2\sigma_X^2}\left[\dfrac{(1-\cos^2\varphi)^{1/2}-\varphi\cos\varphi}{(1-\cos^2\varphi)^{3/2}}\right],\ 0\leqslant\varphi_1,\varphi_2\leqslant 2\pi,\\ 0,\qquad 其它,\end{cases}$$

其中,$I_0(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\exp\{x\cos\varphi\}\mathrm{d}\varphi$ 是第一类零阶修正贝塞尔(Bessel)函数,$\varphi=\cos^{-1}[1-r(\tau)\cos(\varphi_2-\varphi_1)]$.

窄带正态过程的包络和相位不是相互独立的. 当$\tau\to\infty$时,

$A(t_1)$ 与 $A(t_2)$ 是相互独立的，其联合分布密度 $\frac{A_1}{\sigma_X^2}\exp\left\{-\frac{A_1^2}{2\sigma_X^2}\right\}\cdot\frac{A_2}{\sigma_Y^2}\exp\left\{-\frac{A_2^2}{2\sigma_X^2}\right\}$ 是两个瑞利密度之积.

二、正弦波和窄带平稳正态随机过程之和

因为随机相位正弦波是

$$S(t)=B\cos(\omega_0 t+\theta)=B\cos\theta\cos\omega_0 t-B\sin\theta\sin\omega_0 t,$$

均值为零、方差为 σ^2 的窄带平稳正态过程是

$$N(t)=N_c(t)\cos\omega_0 t-N_s(t)\sin\omega_0 t,$$

所以，它们之和为

$$\begin{aligned}Y(t)=N(t)+S(t)&=A_c(t)\cos\omega_0 t-A_s(t)\sin\omega_0 t\\&=A(t)\cos[\omega_0 t+\Phi(t)],\end{aligned}$$

其中 $A_c(t)=B\cos\theta+N_c(t),\quad A_s(t)=B\sin\theta+N_s(t),$

$$A(t)=[A_c^2(t)+A_s^2(t)]^{1/2},\quad \Phi(t)=\arctan\frac{A_s(t)}{A_c(t)}.$$

1. 包络的分布密度为

$$f(A\mid\theta)=\frac{A}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{A^2+B^2}{2\sigma^2}\right\}I_0\left(\frac{AB}{\sigma^2}\right),\ A\geqslant 0,$$

其中 $I_0\left(\frac{AB}{\sigma_2}\right)$ 为零阶修正贝塞尔函数.

包络分布实际上与 θ 无关，故包络密度

$$f(A)=\frac{A}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{A^2+B^2}{2\sigma^2}\right\}I_0\left(\frac{AB}{\sigma^2}\right)$$

服从莱斯分布，当 $B\to 0$ 时，莱斯分布趋向于瑞利分布. 令 $v=A/\sigma, b=B/\sigma$，则：

(1) 在小信噪比($bv\ll 1$)时，包络分布服从瑞利分布，

$$f(v)\approx v\exp\{-v^2/2\}.$$

(2) 在大信噪比($bv\gg 1$)时，包络分布服从正态分布，

$$f(v) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(v-b)^2\right\},$$

且　$A \approx B$，　$v=b$；　$E[A(t)]=B$，　$D[A(t)]=\sigma^2$.

2. 相位的分布密度为

$$f(\varphi \mid \theta) = \frac{1}{2\pi}\exp\{-E^2\} + \frac{E\cos(\varphi-\theta)}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\exp\{-E^2\sin^2(\varphi-\theta)\}\cdot\{1+\mathrm{erf}[E\cos(\varphi-\theta)]\},$$

其中 $E^2=\dfrac{b^2}{2}$，误差函数 $\mathrm{erf}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-Z^2}\mathrm{d}Z$.

(1) 当信噪比很小($E\to 0$) 时，在给定 θ 条件下，相位 $\Phi(t)$ 服从均匀分布，$f(\varphi \mid \theta)=1/(2\pi)$.

(2) 当信噪比很大($E \gg 1$) 时，

$$f(\varphi \mid \theta) \approx \frac{E\cos(\varphi-\theta)}{\sqrt{\pi}}\exp\{-E^2\sin^2(\varphi-\theta)\}$$

是$(\varphi-\theta)$ 的偶函数，当 $\varphi=\theta$ 时取最大值 $E/\sqrt{\pi}$. 当 φ 偏离 θ 时很快衰减，即相位分布密度集中在信号相位 θ 附近.

疑难解析

1. 窄带随机过程有什么实际意义？

答　在通信、控制工程等系统中，有用信号与噪声在经过仪器加工后，仅有在系统通频带内的信号和噪声输出，而其余部分被抑制掉. 在系统通频带内的噪声称为窄带噪声，窄带随机过程是研究窄带噪声的.

从功率谱密度角度来说，若随机过程的功率谱密度分布在一个较窄的频率范围内，而在载频附近的窄带范围之外，其功率谱密度全为零，此时随机过程称为窄带随机过程.

2. 正弦波加窄带平稳正态过程中对随机相位信号 $S(t)$ 与高

斯噪声 $N(t)$ 的分析应注意什么?

答 在 $S(t)$ 与 $N(t)$ 同时存在情况下，对任意给定的 θ 和时刻 t，$S(t)$ 与 $N(t)$ 都是正态随机变量，并且相互独立. 在 θ 给定时，有

$$E[A_c(t) \mid \theta] = R\cos\theta, \quad E[A_s(t) \mid \theta] = R\sin\theta,$$

$$D[A_c(t) \mid \theta] = D[A_s \mid \theta] = \sigma^2.$$

在同一时刻 t，给定 θ，有

$$f(A_c \mid \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(A_c - B\cos\theta)^2\right\},$$

$$f(A_s \mid \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(A_s - B\sin\theta)^2\right\},$$

$$f(A_c, A_s \mid \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(A_c - B\cos\theta)^2 + (A_s - B\sin\theta)^2]\right\}.$$

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设有窄带平稳随机过程

$$Z(t) = X(t)\cos\omega_0 t + Y(t)\sin\omega_0 t,$$

证明： $R_Y(\tau) = R_Z(\tau)\cos\omega_0\tau + \widehat{R}_Z(\tau)\sin\omega_0\tau,$

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau)\cos\omega_0\tau + R_{XY}(\tau)\sin\omega_0\tau.$$

证 要用到希尔伯特变换，先复习一下.

在 $t \in (-\infty, \infty)$ 时，给定实函数 $x(t)$，其希尔伯特变换是

$$\widehat{x}(t) = H \cdot x(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau.$$

希尔伯特逆变换是

$$x(t) = H^{-1} \cdot \widehat{x}(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{x}(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau.$$

由希尔伯特变换性质，得

$$Z(t) = X(t)\cos\omega_0 t - Y(t)\sin\omega_0 t,$$

$$\widehat{Z}(t)=X(t)\sin\omega_0 t+Y(t)\cos\omega_0 t,$$

解出 $Y(t)=Z(t)\cos\omega_0 t-Z(t)\sin\omega_0 t$. 于是，依定义有

$$\begin{aligned}
R_Y(\tau)&=E[Y(t)Y(t-\tau)]\\
&=E\{[\widehat{Z}(t)\cos\omega_0 t-Z(t)\sin\omega_0 t][\widehat{Z}(t-\tau)\cos\omega_0(t-\tau)\\
&\quad-Z(t-\tau)\sin\omega_0(t-\tau)]\}\\
&=R_{\widehat{Z}}(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)-R_{Z\widehat{Z}}(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)\\
&\quad-R_{\widehat{Z}}(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)+R_Z(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)\\
&=R_Z(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)-\widehat{R}_Z(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)\\
&\quad-\widehat{R}_Z(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)+R_Z(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)\\
&=R_Z(\tau)\cos\omega_0\tau+\widehat{R}_Z(\tau)\sin\omega_0\tau.
\end{aligned}$$

其中利用了

$$R_{\widehat{Z}}(\tau)=R_Z(\tau),\quad R_{Z\widehat{Z}}(\tau)=-\widehat{R}_Z(\tau),\quad R_{\widehat{Z}}(\tau)=R_Z(\tau);$$

$$\begin{aligned}
R_Z(\tau)&=E[Z(t)Z(t-\tau)]\\
&=E\{[X(t)\cos\omega_0 t-Y(t)\sin\omega_0 t]\\
&\quad\cdot[X(t-\tau)\cos\omega_0(t-\tau)-Y(t-\tau)\sin\omega_0(t-\tau)]\}\\
&=R_X(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)-R_{YX}(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)\\
&\quad-R_{XY}(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)+R_Y(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)\\
&=R_X(\tau)[\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)+\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)]\\
&\quad-R_{XY}(\tau)[\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)-\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)]\\
&=R_X(\tau)\cos\omega_0\tau+R_{XY}(\tau)\sin\omega_0\tau,
\end{aligned}$$

其中利用了 $R_X(\tau)=R_Y(\tau)$，$R_{XY}(\tau)=-R_{YX}(\tau)$.

例 2 设有均值为零、方差为 σ^2 的窄带正态过程 $Y(t)=A_c(t)\cos\omega_0 t-A_s(t)\sin\omega_0 t$. 试求：包络 $A(t)=\sqrt{A_c^2(t)+A_s^2(t)}$ 在任意时刻所绘出的随机变量 A_t 的数学期望与方差.

解 因 $A_c(t)$ 与 $A_s(t)$ 是相互独立的，且与 $Y(t)$ 有相同分布，故

$$f(A_c,A_s)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{A_c^2+A_s^2}{2\sigma^2}\right\},$$

$$E(A_t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{A_c^2+A_s^2}\,\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{A_c^2+A_s^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}A_c\mathrm{d}A_s$$

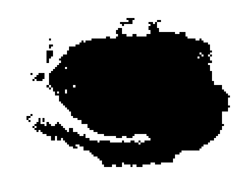
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}r\cdot r\cdot\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\sqrt{\pi/2}\sigma,$$

$$E[A_t^2]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(A_c^2+A_s^2)\,\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{A_c^2+A_s^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}A_c\mathrm{d}A_s$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}r^2\cdot r\,\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=2\sigma^2,$$

所以 $$D[A_c]=E[A_c^2]-\{E[A_c]\}^2=\left(2-\pi/2\right)\sigma^2.$$

第四节　正态随机过程通过非线性系统



主 要 内 容

1. 窄带正态过程包络平方的概率分布. 设非线性系统特性为 $Y=X^2$,输入 $X(t)$ 是窄带正态过程,即 $X(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\Phi(t)]$,则输出过程 $Y(t)$ 的包络分布服从指数分布

$$f(y)=\frac{1}{2\sigma^2}\exp\left\{-\frac{y}{2\sigma^2}\right\},$$

其特征函数 $\varphi(v)=\dfrac{1}{1-2\mathrm{j}v}$,且 $E[Y]=2,D[Y]=4$.

2. 窄带正态过程加正弦波的包络平方的概率分布. 因为

$$Y(t)=S(t)+N(c)=A(t)\cos[\omega_0 t+\Phi(t)],$$

所以 $$f(y)=\frac{1}{2\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y+B^2)\right\}I_0\left(\frac{\sqrt{y}B}{\sigma}\right),\ A\geqslant 0.$$

特征函数

$$\varphi(v)=\exp\left\{-\frac{B^2}{\sigma^2}\right\}\left(\frac{1}{1-\mathrm{j}2v\sigma^2}\right)\exp\left\{\frac{B^2/\sigma^2}{1-\mathrm{j}2v\sigma^2}\right\}.$$

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设信号与窄带高斯噪声之和为

$$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Theta)+N(t),$$

其中Θ是$(0,2\pi)$内均匀分布的随机变量，$N(t)$是窄带平稳正态过程，均值是零，方差是σ^2，且

$$N(t)=N_c(t)\cos\omega_0 t-N_s(t)\sin\omega_0 t,$$

证明：$X(t)$的包络平方的自相关函数为

$$R_X(\tau)=a^4+4a^2\sigma^2+4\sigma^2+4[a^2R_{N_c}(\tau)+R^2_{N_c}(\tau)+R^2_{N_cN_s}(\tau)]$$

证 因为$X(t)$可写为

$$X(t)=[a\cos\Theta+N_c(t)]\cos\omega_0 t-[a\sin\Theta+N_s(t)]\sin\omega_0 t,$$

设$X(t)$的包络平方为$A(t)$，则

$$\begin{aligned}A(t)&=[a\cos\Theta+N_c(t)]^2+[a\sin\Theta+N_s(t)]^2\\&=a^2+2aN_c(t)\cos\Theta+2aN_s(t)\sin\Theta+N_c^2(t)+N_s^2(t).\end{aligned}$$

于是，依相关函数定义，有

$$\begin{aligned}R_X(\tau)&=E[A(t)A(t-\tau)]\\&=E\{[a^2+2aN_c(t)\cos\Theta+2aN_s(t)\sin\Theta+N_c^2(t)+N_s^2(t)]\\&\quad\cdot[a^2+2aN_c(t-\tau)\cos\Theta+2aN_s(t-\tau)\cos\Theta+N_c^2(t-\tau)\\&\quad+N_s^2(t-\tau)]\}.\end{aligned}$$

利用 $E[N_c(t)]=E[N_s(t)]=0,\quad E[N_c^2(t)]=E[N_s^2(t)]=\sigma^2,$

$$E[N_c(t)N_s(t)]=R_{N_cN_s}(0)=0,$$

$$R_{N_c}(\tau)=R_{N_s}(\tau)=0,\quad R_{N_cN_s}(\tau)=-R_{N_sN_c}(\tau).$$

由于零均值正态变量的奇次阶混合矩等于零，即

$$\begin{aligned}&E[N_c^2(t)N_s(t-\tau)]\\&=E[N_s^2(t)N_c(t-\tau)]=E[N_c^2(t)N_c(t-\tau)]\\&=E[N_s^2(t)N_s(t-\tau)]=E[N_c(t)N_s^2(t-\tau)]\\&=E[N_s(t)N_c^2(t-\tau)]=E[N_c(t)N_c^2(t-\tau)]\\&=E[N_s(t)N_s^2(t-\tau)]=0\end{aligned}$$

及 $$E[X^2(t)Y^2(t-\tau)] = R_X(0)R_Y(0) + 2R_{XY}^2(\tau),$$
当式中 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 是联合正态分布函数时,有

$$E[N_c^2(t)N_c^2(t-\tau)] = \sigma^4 + 2R_{N_c}^2(\tau),$$
$$E[N_s^2(t)N_s^2(t-\tau)] = \sigma^4 + 2R_{N_c}^2(\tau),$$
$$E[N_s^2(t)N_c^2(t-\tau)] = \sigma^4 + 2R_{N_cN_s}^2(\tau),$$
$$E[N_c^2(t)N_s^2(t-\tau)] = \sigma^4 + 2R_{N_cN_s}^2(\tau),$$

将上面结果代入 $R_X(\tau)$ 的计算式的展开式中,经过化简可得

$$R_X(\tau) = a^4 + 4a^2\sigma^2 + 4\sigma^4 + 4[a^2R_{N_c}(\tau) + R_{N_c}^2(\tau) + R_{N_cN_s}^2(\tau)],$$

即命题得证.

例 2　随机噪声通过平方律检波器的分析.

图 8.1 中 Ⅰ 表示一非线性器件,其输入、输出满足关系 $y = ax^2$,a 是常数. Ⅱ 是一个低通滤波器,Ⅰ、Ⅱ 合起来称为全波平方律检波器.

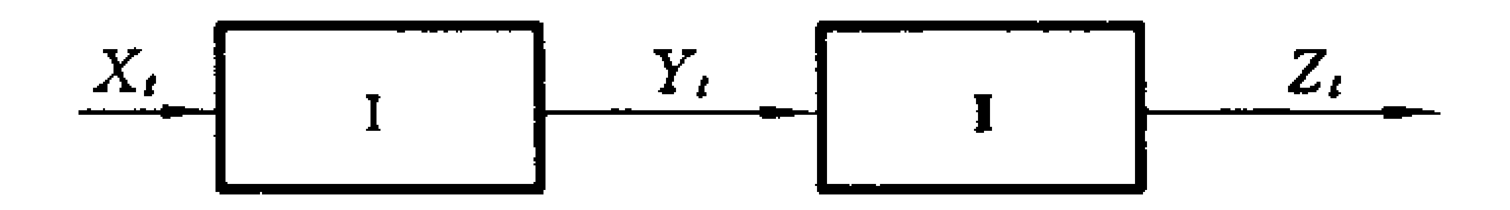


图 8.1

解　因为 $P\{Y_t < y\} = P_X\{X_t \in A(y)\}$,则

当 $y < 0$ 时,　　$P\{Y_t < y < 0\} = 0$,

当 $y > 0$ 时,

$$P\{Y_t < y\} = P\{-\sqrt{y_t/a} < X_t < \sqrt{y_t/a}\}$$
$$= P\{X_t < \sqrt{y_t/a}\} - P\{X_t \leqslant -\sqrt{y_t/a}\},$$

所以 $$f_{Y_t}(y) = \frac{1}{2\sqrt{ay_t}}[f_{X_t}(x_t = \sqrt{y_t/a}) + f_{X_t}(x_t = -\sqrt{y_t/a})],$$

$$E[y_t^n] = a^n\int_{-\infty}^{\infty} x_t^{2n} f_{X_t}(x_t)\mathrm{d}x_t = a^nE[X_t^{2n}],$$

$$R_{Y_t}(t_1,t_2) = a^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1}^2 x_{t_2}^2 f_{x_{t_1}x_{t_2}}(x_{t_1},x_{t_2})\mathrm{d}x_{t_1}\mathrm{d}x_{t_2}$$
$$= a^2E[X_{t_1}^2X_{t_2}^2].$$

如果输入 $X(t)$ 是二级严平稳过程,则输出是宽平稳过程.

如果输入是正态过程,且其均值为零,则

$$f_X(x_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left\{-\frac{x_t^2}{2\sigma_X^2}\right\},$$

$$f_Y(y_t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi a y_t}\sigma_X}\exp\left\{-\dfrac{y_t}{2\sigma_X^2 a}\right\}, & y_t\geqslant 0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

即 Y_t 是$\chi^2(1)$ 分布.

如果输入 $X(t)$ 是窄带平稳正态过程,则

$$X(t)=A(t)\cos(\omega_0 t+\Phi(t)),$$

其中,$A(t)$ 是其包络,$\Phi(t)$ 是随机相位,$\omega_0=2\pi f_0$,f_0 是中心频率.

经过非线性器件 Ⅰ 的输出

$$\begin{aligned}Y_t&=aA^2(t)\cos^2[\omega_0 t+\Phi(t)]\\&=\frac{a}{2}A^2(t)[1+\cos(2\omega_0 t+2\Phi(t))],\end{aligned}$$

其中第一项反映的是低频分量,第二项反映的是调制载频为 $2f_0$ 的随机信号.

经过低通滤波器 Ⅱ 的输出

$$Z_t=\frac{a}{2}A^2(t).$$

窄带高斯噪声的包络分布为瑞利分布

$$f(A_t)=\begin{cases}\dfrac{A_t}{\sigma_X^2}e^{-A_t^2/(2\sigma_X^2)}, & A_t\geqslant 0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f_{Z_t}(Z_t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sigma_X^2}e^{-Z/(a\sigma_X^2)}, & Z\geqslant 0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

即理想低通滤波器的输出 Z_t 服从指数分布.

(Ⅰ)输出的各阶矩(计算过程略)为

$$E[Y_t]=a\sigma_X^2,\quad E[Y_t^2]=3a^2\sigma_X^4,$$
$$E[Y_t^n]=a^n\sigma_X^{2n}(2n-1)!!,\quad D[Y_t]=2a^2\sigma_X^4.$$

（Ⅱ）输出的各阶矩为

$$E[Z_t]=a\sigma_X^2,\quad E[Z_t^2]=2a^2\sigma_X^2,$$
$$E[Z_t^n]=n!a^n\sigma_X^{2n},\quad D[Z_t]=a^2\sigma_X^4.$$

例 3　信号加噪声通过平方律检波器分析. 如果平方律检波器输入是随机信号 $S(t)$ 与随机噪声 $N(t)$ 之和，$S(t)$ 与 $N(t)$ 是相互独立的实平稳随机过程，且 $S(t)$ 与 $N(t)$ 的均值均为零.

解　此时，平方律检波器的输出是

$$Y(t)=a[X(t)]^2=a[S^2(t)+2S(t)N(t)+N^2(t)],$$

故
$$E[Y(t)]=aE[S^2(t)+2S(t)N(t)+N^2(t)]$$
$$=aE[S^2(t)]+aE[N^2(t)]=a(\sigma_S^2+\sigma_N^2)\text{（常数）},$$
$$E[Y^2(t)]=a^2E\{[S(t)+N(t)]^4\}$$
$$=a^2E[S^4(t)]+6\sigma_S^2\sigma_N^2+E[N^4(t)],$$
$$\begin{aligned}R_Y(t_1,t_2)&=E[Y(t_1)Y(t_2)]\\&=a^2E\{[S(t_1)+N(t_1)]^2[S(t_2)+N(t_2)]^2\}\\&=a^2E[S^2(t_1)S^2(t_2)]\\&\quad+a^24E[S(t_1)S(t_2)]E[N(t_1)(N(t_2)]\\&\quad+a^2E[N^2(t_1)N^2(t_2)]+a^2E[S^2(t_1)]E[N^2(t_2)]\\&\quad+a^2E[S^2(t_2)]E[N^2(t_1)].\end{aligned}$$

若 $S(t)$ 与 $N(t)$ 均为平稳过程，设 $\tau=t_1-t_2$，则

$$E[S^2(t_1)S^2(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{t_1}^2S_{t_2}^2f(S_{t_1},S_{t_2})\mathrm{d}S_{t_1}\mathrm{d}S_{t_2}=R_{S^2}(\tau),$$
$$E[N^2(t_1)N^2(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}n_{t_1}^2n_{t_2}^2f(n_{t_1},n_{t_2})\mathrm{d}n_{t_1}\mathrm{d}n_{t_2}=R_{N^2}(\tau).$$

故
$$R_Y(\tau)=R_{SS}(\tau)+R_{SN}(\tau)+R_{NN}(\tau),$$

其中
$$R_{SS}(\tau)=a^2R_{S^2}(\tau),\quad R_{NN}(\tau)=a^2R_{N^2}(\tau),$$
$$R_{NS}(\tau)=a^2[4R_S(\tau)R_N(\tau)+2\sigma_S^2\sigma_N^2].$$

对 $R_Y(\tau)$ 式两边取傅里叶变换，得

$$S_Y(\omega)=S_{SS}(\omega)+S_{SN}(\omega)+S_{NN}(\omega),$$

其中
$$S_{SS}(\omega)=a^2\int_{-\infty}^{\infty}R_{S^2}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

$$S_{NN}(\omega)=a^2\int_{-\infty}^{\infty}R_{N^2}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

$$S_{SN}(\omega)=4a^2\int_{-\infty}^{\infty}S_N(\omega_1)S_S(\omega-\omega_1)\mathrm{d}\omega_1+2a^2\sigma_S^2\sigma_N^2\delta(t).$$

$S_S(\omega)$ 和 $S_N(\omega)$ 分别是 $S(t)$ 和 $N(t)$ 的功率谱密度. $S_{SN}(\omega)$ 中的第一项是 $S_N(\omega)$ 与 $S_S(\omega)$ 的卷积,第二项是直流分量,$S_{SN}(\omega)$ 表示输出端的噪声因信号的存在而有增加.

若输入噪声是窄带实平稳正态过程,均值为零,输入信号 $S(t)=A\cos(\omega_0 t+\Phi)$,$A$ 是常数,Φ 在 $(0,2\pi)$ 内服从均匀分布,Φ 与 $N(t)$ 独立. 则

$$R_{NN}(\tau)=a^2R_{N^2}(\tau)=a^2\sigma_N^4+2a^2R_N^2(\tau),$$

$$S_{NN}(\omega)=2a^2\int_{-\infty}^{\infty}S_N(\omega_1)S_N(\omega-\omega_1)\mathrm{d}\omega_1+a^2\sigma_N^4\delta(t),$$

其中 $R_{NN}(\tau)$,$S_{NN}(\omega)$ 分别是信号为零时的输出相关函数和功率谱密度. 而

$$\begin{aligned}R_S(\tau)&=A^2E[\cos(\omega_0t_1+\Phi)\cos(\omega_0t_2+\Phi)]\\&=\frac{A^2}{2}\left\{\cos[\omega_0(t_1-t_2)]+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos[\omega_0(t_1+t_2)+2\Phi]\mathrm{d}\Phi\right\}\\&=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau),\end{aligned}$$

故
$$S_S(\omega)=\frac{A^2}{4}[\delta(\omega-f_0)+\delta(\omega+f_0)],$$

于是
$$R_{SN}(\tau)=2a^2A^2R_N(\tau)\cos\omega_0\tau+a^2A^2\sigma_N^2,$$

$$S_{SN}(\omega)=a^2A^2[S_N(\omega-f_0)+S_N(\omega-f_0)+\sigma_N^2\delta(\omega)],$$

$$\begin{aligned}E[S^2(t_1)S^2(t_2)]&=A^4E[\cos^2(\omega_0t_1+\Phi)\cos^2(\omega_0t_2+\Phi)]\\&=\frac{A^4}{4}+\frac{A^4}{8}\cos(2\omega_0\tau).\end{aligned}$$

故 $$R_{SS}(\tau)=\frac{a^2A^4}{4}+\frac{a^2A^4}{8}\cos(2\omega_0\tau),$$

$$S_{SS}(\omega)=\frac{a^2A^4}{4}\delta(t)+\frac{a^2A^4}{16}[\delta(\omega-2f_0)+\delta(\omega+2f_0)],$$

其中,f_0 是中心频率,$\omega_0=2\pi f_0$,从而有

$$R_Y(\tau)=a^2\left[\left(\frac{A^2}{2}+\sigma_N^2\right)^2+2R_N^2(\tau)+2A^2R_N(\tau)\cos\omega_0 t+\frac{A_4}{8}\cos(2\omega_0\tau)\right],$$

$$S_Y(\omega)=a^2\left[\left(\frac{A^2}{2}+\sigma_N^2\right)^2\delta(\omega)+2\int_{-\infty}^{\infty}S_N(\omega_1)S_N(\omega-\omega_1)\mathrm{d}\omega_1\right]+a^2\{A^2[S_N(\omega-f_0)+S_N(\omega+f_0)]+\frac{A^4}{16}[\delta(\omega-2f_0)+\delta(\omega+2f_0)]\},$$

于是 $$E[Y_t]=a\left[\frac{A^2}{2}+\sigma_N^2\right],$$

$$E[Y_t^2]=R_Y(0)=a^2\left[\left(\frac{A^2}{2}+\sigma_N^2\right)^2+2\sigma_N^4+2A^2\sigma_N^2+\frac{A^4}{8}\right],$$

$$D[Y_t]=2a^2\left(\frac{A^4}{16}+A^2\sigma_N^2+\sigma_N^4\right).$$

第五节 χ^2 分布与维纳过程

主要内容

一、χ^2 分布

1. 若 n 个相互独立的正态随机变量 $X_i,i=1,2,\cdots,n$ 有相同的均值零与相同的方差 σ^2,则称 $S=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 为有 n 个自由度的 χ^2 变量.

χ^2 变量的概率密度为

$$f_S(s)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}S^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{s}{2}},\quad S\geqslant 0;$$

其中伽马函数 $\Gamma(\alpha)=\int_0^t t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. 特征函数为

$$\varphi(v)=\frac{1}{(1-2\mathrm{j}\,v)^{n/2}}.$$

有 $E[S]=n, D[S]=2n$, 自由度 $n=2E^2[S]/D[S]$.

两个相互独立、自由度分别为 n_1 和 n_2 的 χ^2 随机变量 S_{n_1} 和 S_{n_2} 之和是自由度 $n=n_1+n_2$ 的 χ^2 分布.

2. 在第 1 点的条件下, $S^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i+B_i)^2$ 称为有 n 个自由度的非中心 χ^2 **随机变量**, 其中 B_i 为非随机变量.

非中心 χ^2 变量的分布密度为

$$f_S(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}}\exp\left\{-\frac{\lambda+s}{2}\right\}I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{s\lambda}),\quad \lambda=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}B_i^2.$$

其中 $I_{n/2-1}(x)$ 为第一类 $(n/2-1)$ 阶修正贝塞尔函数. 特征函数为

$$\varphi(v)=\left(\frac{1}{1-\mathrm{j}2\sigma^2 v}\right)^{n/2}\exp\left\{-\frac{nB_i^2}{2\sigma^2}\right\}\exp\left\{\frac{nB_i^2/(2\sigma^2)}{1-\mathrm{j}2\sigma^2 v}\right\}.$$

两个相互独立、自由度分别为 n_1 和 n_2 的非中心 χ^2 变量, 若非中心参量分别为 λ_1 与 λ_2, 则它们的和是 n_1+n_2 个自由度的非中心 χ^2 变量, 其非中心参量为 $\lambda_1+\lambda_2$.

二、维纳过程

1. 设随机过程 $\{W_0(t), t\in[0,\infty)\}$ 满足:

(1) $W_0(t)$ 是独立增量过程, 对任意 $t_1, t_2\in[0,\infty), t_1<t_0$ 及 $h>0$, 增量 $W_0(t_2+h)-W(t_1+h)$ 有相同的分布密度.

(2) 对任意的 $t\in[0,\infty)$, 增量 $W_0(t_2)-W_0(t_1)$ 的正态分布密度, 有

$$f_{W_0(t_2)-W_0(t_1)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}\exp\{-\frac{x^2}{2(t_2-t_1)}\},\ x\in(-\infty,\infty).$$

(3) 若 $P\{W_0(0)=0\}=1$，则称 $W_0(t)$ 为**规范化维纳过程**.

$$E[W_0(t_2)W_0(t_1)]=E\{[W_0(t_1)]^2\}=t_1,\quad t_2\geqslant t_1,$$

$$E[W_0(t_1)W_0(t_2)]=t_2,\quad t_1\geqslant t_2,$$

故 $$E[W_0(t_2)W_0(t_1)]=R_{W_0}(t_2,t_1)=\min(t_2,\ t_1).$$

若 $$W(t)=\mu t+\sigma W_0(t),$$

则 $$E[W(t)]=\mu t,\ D[W(t)]=\sigma^2 t.$$

其中，μ，σ^2 是常数，μ 称为**偏移系数**，σ^2 称为过程的**强度**，其一维分布密度为

$$f_{W(t)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right\}.$$

由上述讨论知，$W(t)$，$W_0(t)$ 是非平稳过程. 故

1) 维纳过程是独立增量过程，且为齐次增量过程，因而是马尔可夫过程；

2) 增量的分布是正态的，因而是正态过程；

3) 维纳过程是非平稳过程。

因维纳过程 $W_0(t)$ 的相关函数 $R_{W_0(t)}(t_1,t_2)$ 不存在二阶偏导数，故 $W_0(t)$ 不存在均方导数. 其形式导数定义为 $W'_0(t)$，则

$$\frac{\partial^2}{\partial t_2\partial t_1}R_{W_0}(t)(t_2,t_1)=\delta(t_2-t_1),$$

可将上式看作维纳过程的导数过程 $W'_0(t)$ 的相关函数，即 $RW'_0(t)(t_2-t_1)=\delta(t_2-t_1)$. 当 $t_2\neq t_1$ 时，由 $W'_0(t_1)$ 和 $W'_0(t_2)$ 的相关函数为零，均值也为零，从而知 $W'_0(t_1)$ 和 $W'_0(t_2)$ 不相关.

2. 维纳过程 $W(t)$ 定义为零均值平稳高斯白噪声 $X(t)$ 的积分，即

$$W(t)=\int_0^t X(u)\mathrm{d}u,\quad W(0)=0,$$

对于其中 $X(t)$，有 $E[X(t)]=0,R_X(\tau)=\sigma^2\delta(\tau)$.

$W(t)$ 是一高斯过程,有

$$E[W(t)] = E\left[\int_0^t X(u)\mathrm{d}u\right] = \int_0^t E[X(u)]\mathrm{d}u = 0,$$

$$W(0) = \int_0^0 X(u)\mathrm{d}u = 0,$$

$$\mathrm{Cov}(W(t_1), W(t_2)) = E\left[\int_0^{t_1} X(u_1)\mathrm{d}u_1 \int_0^{t_2} X(u_2)\mathrm{d}u_2\right]$$
$$= \sigma^2 \min(t_1, t_2),$$

$$E[W(t_1) - W(t_2)] = 0, \quad D[W(t_1) - W(t_2)] = \sigma^2 \mid t_2 - t_1 \mid.$$

疑 难 解 析

什么是高斯白噪声?

答 两均值为零、相关函数是 $\delta(t)$ 函数的过程称为白噪声.由于 $W_0(t)$ 是高斯过程,其形式导数 $W_0'(t)$ 符合白噪声条件,称为高斯白噪声.

方法、技巧与典型例题分析

χ^2 分布是概率论中已熟悉的概念,维纳过程也已在第一章中讨论过,现在从窄带随机过程的角度再进行讨论.请读者注意其中的不同.

例 1 设随机变量 X 和 Y 都服从χ^2分布,自由度分别为 m 与 n,且相互独立.证明:随机变量 $Z = X + Y$ 也服从χ^2分布,且自由度是 $m+n$.

证 随机变量和的卷积公式,得

$$f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y) = \int_0^Z f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^Z \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} x^{\frac{m}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} (z-x)^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z-x)} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^{(m+n)/2}\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} e^{-z/2} \int_0^z x^{\frac{m}{2}-1}(z-x)^{\frac{n}{2}-1} dx.$$

令 $x = zt$，则

$$f_Z(z) = \frac{1}{2^{(m+n)/2}\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} e^{-z/2} z^{\frac{m+n}{2}-1} \int_0^1 t^{\frac{m}{2}-1}(1-t)^{\frac{n}{2}-1} dt$$

$$= \frac{1}{2^{(m+n)/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} z^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{(m+n)/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} z^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2^{(m+n)/2}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)} z^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}.$$

所以，$Z = X + Y$ 服从 χ^2 分布，且自由度为 $m+n$.

例 2 设一包络如图 8.2 所示，平方律检波器的输入为

$$Y(t) = B\cos(\omega_0 t + \theta) + N(t),$$

$N(t)$ 表示窄带高斯噪声，其均值为零，方差为 σ^2，且 $N(t) = N_c(t)\cos\omega_0 t - N_s(t)\sin\omega_0 t$. 讨论经检波并归一化处理后，独立抽样 m 次，相加后其输出是什么分布.

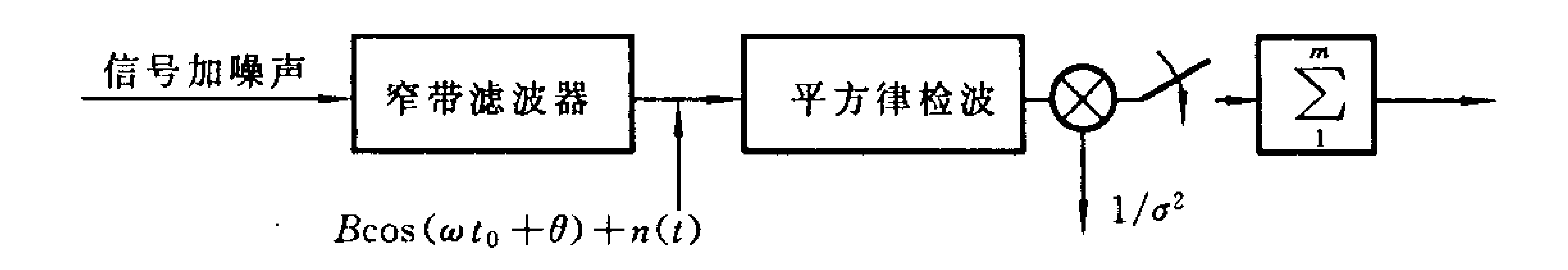


图 8.2

解 因为平方律检波器的输出是输入过程包络的平方，即

$$A^2(t) = [B\cos\theta + N_c(t)]^2 + [B\sin\theta + N_s(t)]^2.$$

由于独立抽样可以得到 m 个随机变量，每个抽样值又是两个正交分量，故相加后的输出为

$$S = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{m}\{[B\cos\theta + N_c(t_i)]^2 + [B\sin\theta + N_s(t_i)]^2\}.$$

式中两项都是有 m 个自由度的非中心χ^2 变量,非中心参量分别为

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{B\cos\theta}{\sigma}\right)^2 = \frac{mB^2}{\sigma^2}\cos^2\theta,\ \lambda_2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{B\sin\theta}{\sigma}\right)^2 = \frac{mB^2}{\sigma^2}\sin^2\theta.$$

所以,S是有 $2m$个自由度的非中心χ^2 变量,非中心参量为$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = mB^2/\sigma^2$. 于是,$S$ 的分布密度为

$$f_S(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{m-1}{2}}\exp\left\{-\frac{\lambda + s}{2}\right\}I_{m-1}(\sqrt{s\lambda}),\ s \geqslant 0.$$

非中心参量与自由度之比为

$$\frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{2m} = \frac{B^2}{2\sigma^2},$$

它恰为平方律检波器输入端功率的信噪比.

变量 S 的均方和方差分别为

$$E[S] = 2m\left(1 + \frac{B^2}{2\sigma^2}\right),\quad D[S] = 4m\left(1 + \frac{B^2}{\sigma^2}\right).$$

例 3 设$\{W(t),\ t \in (-\infty,\infty)\}$ 是参数为σ^2 的维纳过程,令 $X(t) = e^{-at}W(e^{2at}),\ t \in (-\infty,\infty), a > 0$ 为常数,证明:$\{X(t),\ t \in (-\infty,\ \infty)\}$ 是平稳正态过程,相关函数 $R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|}$.

证 因为 $\quad W(t) \sim N(0,\sigma^2 \mid t \mid),$

所以 $\quad W(e^{2at}) \sim N(0,\ \sigma^2 e^{2at}),\quad Z(t) \sim N(0,\ \sigma^2),$

$$E[X(t)] = 0,\ t \in (-\infty,\infty).$$

对任意 $t_1 \leqslant t_2 \in (-\infty,\infty),\ e^{2at_1} \leqslant e^{2at_2}$, 有

$$\begin{aligned} R_X(t_1,\ t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = e^{-a(t_1+t_2)}E[W(e^{2at_1})W(e^{2at_2})] \\ &= e^{-a(t_1+t_2)}E\{[W(e^{2at_1}) - W(0)] \\ &\quad \cdot [W(e^{2at_2}) - W(e^{2at_1}) + W(e^{2at_1})]\}. \end{aligned}$$

由于 $W(t)$ 又是独立增量过程,因此

$$\begin{aligned} &E\{[W(e^{2at_1}) - W(0)][W(e^{2at_2}) - W(e^{2at_1})]\} \\ &= E[W^{(2at_1)} - W(0)]E[W(e^{2at_2}) - W(e^{2at_1})] = 0. \end{aligned}$$

从而 $R_X(t_1, t_2) = e^{-a(t_1+t_2)}E\{[W(e^{2at_1})]^2\}$

$$= e^{-a(t_1+t_2)}\{D[W(e^{2at_1})]+(E[W(e^{2at_1})])^2\}$$

$$= e^{-a(t_1+t_2)}\sigma^2 e^{2at_1} = \sigma^2 e^{-a(t_2-t_1)}.$$

同理,当 $t_1 > t_2$ 时,有

$$R_X(t_1,t_2) = \sigma^2 e^{-a(t_1-t_2)}.$$

综合得

$$R_X(t_1,t_2) = \sigma^2 e^{-a|t_1-t_2|}.$$

例 4 设 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是维纳过程,且 $X(0)=0$. 求其有限维概率密度函数.

解 因为 $X(t)\sim N(0, \sigma^2 t)$,所以对任意 n 及 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$,有 $X(t_i)\sim N(0,\sigma^2 t_i)$, $i=0,1,\cdots,n$. 又因为维纳过程是齐次的独立增量过程,所以 $(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$ 的联合概率密度可以由独立性求得,即

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}\sigma}e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2 t_1}}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi|t_{k+1}-t_k|}\sigma}e^{-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2\sigma^2|t_{k+1}-t_k|}}.$$

例 5 设 $\{X(t),t\in[0,\infty)\}$ 是以 σ^2 为参数的维纳过程,证明下列过程也是维纳过程:

(1) $X_t = cX_{t/c^2}$, $0\leqslant t<\infty$, $c>0$;

(2) $X_t = X_{t+h}-X_h$, $0\leqslant t<\infty$, $h>0$;

(3) $X_t = \begin{cases} tX_{t^{-1}}, & t>0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

证 (1) 显然,$X_0=0$, X_t 服从正态分布,$E[X_t]=0$,且

$$D[X(t)] = c^2 D[X_{t/c^2}] = c^2\sigma^2 t/c^2 = \sigma^2 t,$$

故 $X_t\sim N(0,\sigma^2 t)$. $\{X_t\}$ 有独立增量,所以,$\{X_t\}$ 是维纳过程.

(2) 同理,$X_0=0$,$E[X_t]=0$, X_t 服从正态分布,且

$$D[X(t)] = D[X_{h+t}-X_h] = \sigma^2(t+h-h) = \sigma^2 t,$$

故 $X_t\sim N(0,\sigma^2 t)$. $X(t)$ 有独立增量,所以,$\{X_t\}$ 是维纳过程.

(3) 同理,$X_0=0$, $E[X_t]=0$,X_t 服从正态分布,且

$$D[X(t)] = D[X_{t^{-1}}] = t^2 \frac{\sigma^2}{t} = t\sigma^2,$$

故 $X_t \sim N(0,\sigma^2 t)$. 因为，对任意的 $n \geqslant 1$，$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，而 $(X_{t_1^{-1}}, X_{t_2^{-1}}, \cdots, X_{t_n^{-1}})$ 是 $n-1$ 维正态随机变量，故 $X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 是 $n-1$ 维正态随机变量. 因为，$\forall r < s < t$，有

$$\begin{aligned}
&E[(X_t - X_s)(X_s - X_r)] \\
&= E[(tX_{t^{-1}} - sX_{s^{-1}})(sX_{s^{-1}} - rX_{s^{-1}})] \\
&= st\sigma^2(t^{-1} \wedge s^{-1}) - rt\sigma^2(t^{-1} \wedge r^{-1}) - s^2\sigma^2 s^{-1} + rs(s^{-1} \wedge r^{-1}) \\
&= \sigma^2(s - r - s + r) = 0,
\end{aligned}$$

其中 $t^{-1} \wedge s^{-1} = \min\{t^{-1}, s^{-1}\}$. 由上式知它们两两不相关，所以相互独立. 于是 $\{X_t\}$ 是维纳过程.

例 6 设 $\{W_t, t \in [0,\infty)\}$ 是以 σ^2 为参数的维纳过程，令

$$X_n = \sum_{k=0}^{2^n} (W_{k/2^n} - W_{(k-1)/2^n})^2, \ n = 1,2,\cdots$$

证明：

$$\lim_{n\to\infty} E[\,|X_n - 1|^2] = 0.$$

证 因为

$$X_n - 1 = \sum_{k=0}^{2^n}\left[(W_{k/2^n} - W_{(k-1)/2^n})^2 - \left(\frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n}\right)\right] = \sum_{k=1}^{2^n} Z_k,$$

显然，Z_k 相互独立，且 $E[Z_k] = 0$，故

$$\begin{aligned}
E[\,|X_n - 1|^2] &= E\left[\left(\sum_{k=1}^{2^n} Z_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{2^n} E[Z_k]^2 \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} E\left\{\left[(W_{k/2^n} - W_{(k-1)/2^n})^2 - \left(\frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n}\right)\right]^2\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} E\left\{\left[(Y_n^2 - 1)\frac{1}{2^n}\right]^2\right\},
\end{aligned}$$

其中

$$Y_n = \frac{W_{k/2^n} - W_{(k-1)/2^n}}{(1/2^n)^{1/2}}.$$

由于 Y_n 服从同一正态分布，故

$$E[|X_n-1|^2]=E[(Y_n^2-1)^2]\sum_{k=1}^{2^n}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2$$

$$\leqslant E[(Y_1^2-1)^2]\frac{1}{2^n}=D[Y_1^2]\frac{1}{2^n}=2\cdot\frac{1}{2^n}\ (n\geqslant 1),$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}E[|X_n-1|^2]=0.$$

例 7 设$\{X_t, t\in[0,\infty)\}$是一个维纳过程，$\forall t_0\in[0,\infty)$，有

$$P\{t\mapsto X_t \quad 在\ t_0\ 有有穷导数\}=0.$$

其中，$t\mapsto f(x)$ 表示在 x 的值为 $f(x)$ 的映射 f.

证 用反证法. 设存在 $t_0\in[0,\infty)$，使得

$$P\{t\mapsto X_t\ 在\ t_0\ 有有穷导数\}=a>0,$$

则对 $h>0$，有

$$P\left\{\lim_{h\to 0^+}\frac{X_{t_0+h}-X_{t_0}}{\sqrt{h}}=0\right\}\geqslant P\{t\mapsto X_t\}\ 在\ t_0\ 有有穷导数\}=a,$$

从而，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $h<\delta$ 时，有

$$P\left\{\left|\frac{X_{t_0+h}-X_{t_0}}{\sqrt{h}}\right|<\varepsilon\right\}>\frac{a}{2}.$$

但另一方面，由于 $X_{t_0+h}-X_{t_0}\sim N(0,\sigma^2 h)$，故

$$(X_{t_0+h}-X_{t_0})/\sqrt{h}\sim N(0,\sigma^2),$$

依正态分布的性质，当 ε 充分小时，$P\left\{\left|\frac{X_{t_0+h}-X_0}{\sqrt{h}}\right|<\varepsilon\right\}$，

即
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{|X|\leqslant\varepsilon}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}dx<\frac{a}{2}$$

与 $h>0$ 无关. 所以推出矛盾. 于是，所证命题成立.

第九章　时间序列分析简介

第一节　时间序列与 ARMA 模型

主 要 内 容

一、时间序列

1. 当随机过程$\{X(t), t\in T\}$的参数集 T 取 $T=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$或 $T=\{1, 2, \cdots\}$时，称$\{X(t), t\in T\}$为**随机序列**. 在工程技术中，随机序列的参数集 T 用来表示时间时，称随机序列为**时间序列**$\{X_t, t=1, 2, \cdots\}$. 时间序列的一个样本函数$\{x_t, t=1, 2, \cdots\}$是时间序列的一个现实.

2. 若$\{X_t, t=1, 2, \cdots\}$是平稳过程，则其协方差函数与相关(系数)函数满足

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h})=E[(X_t-\mu)(X_{t+h}-\mu)]=C_X(h)=C_X(0)\rho_X(h).$$

设$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是 n 个观测数据，则$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$的样本协方差函数定义为

$$\hat{\gamma}(h)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-h}(x_{i+h}-\bar{x})(x_i-\bar{x}),\ 0\leqslant h\leqslant n,$$

其中

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

样本相关(系数)函数定义为

$$\hat{\rho}(h)=\hat{\gamma}(h)/\hat{\gamma}(0),\ |h|<n.$$

相应的样本协方差阵与样本相关(系数)函数阵都是非负定的.

二、ARMA 模型

1. 设$\{X_t, t=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$是均值为零的实平稳时间序列,则表达式

$$X_t=\varphi_1 X_{t-1}+\varphi_2 X_{t-2}+\cdots+\varphi_p X_{t-p}+Z_t$$

或

$$\varphi(B)X_t=Z_t$$

称为阶数为 p 的**自回归模型**. $\{Z_t, t=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$是均值为零、方差为$\sigma^2$、两两不相关的随机变量序列,$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$ 为常数,简记为 AR(p).

2. 设$\{X(t), t=0, \pm1, \cdots\}$是均值为零的实平稳时间序列,且满足差分方程

$$X_t-\varphi_1 X_{t-1}-\cdots-\varphi_p X_{t-p}=Z_t+\theta_1 Z_{t-1}+\cdots+\theta_q Z_{t-q},$$

其中$\{Z_t\}\sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$,即均值为零、方差为$\sigma^2$的白噪声,且满足

$$\varphi(Z)=1-\varphi_1 Z-\cdots-\varphi_p Z^p,\quad \theta(Z)=1+\theta_1 Z+\cdots+\theta_q Z^q,$$

两个多项式无公共因子,则称$\{X_t, t=0, \pm1, \cdots\}$为 **$p$ 阶自回归 q 阶滑动混合模型**. 简记差分方程为 $\varphi(B)X_t=\theta(B)Z_t$, $t=0, \pm1, \cdots$,其中 B 是由 $\varphi(B)X_t=X_{t-j}$, $t=0, \pm1, \cdots$定义的延迟算子. $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p)$称为**自回归系数**,$(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q)$称为**滑动平均系数**. 上述差分方程模型记为 ARMA(p, q),满足 ARMA 模型的随机序列称 ARMA 序列.

3. 设$\{X_t, t=0, \pm1, \cdots\}$是均值为零的实平稳时间序列,若$\varphi(Z)\equiv1$,满足方程 $X_t=\theta(B)Z_t$,则称$\{X_t, t=0, \pm1, \cdots\}$为 **$q$ 阶滑动平均过程**,记为 MA(q).

4. 设$\{X_t, t=0, \pm1, \cdots\}$是 ARMA 过程,如果存在常数列$\{\psi_j\}$,满足 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\psi_j|<\infty$,使得

$$X_t=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j Z_{t-j},\ t=0, \pm1, \cdots,$$

则称$\{X_t, t=0, \pm1, \cdots\}$是**因果 ARMA($p$, q)过程**. 此性质称为**因果性**.

5. 设$\{X_t, t=0,\pm1,\cdots\}$是 ARMA(p,q)序列，则$\{X_t, t=0,\pm1,\cdots\}$是因果 ARMA(p,q)过程的充要条件是：$\varphi(Z)$的根都在单位圆外，系数$\{\psi_j\}$由

$$\psi(Z)=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j Z^j=\theta(Z)/\varphi(Z),\ |Z|\leqslant 1$$

所确定. $\varphi(Z)$又称为**格林函数**(也记为$G(Z)$).

对于因果 ARMA(p,q)过程，有$E[X_{t-l}Z_t]=0, l\geqslant 1$.

6. 设$\{X_t, t=0,\pm1,\cdots\}$是由$\varphi(B)=\theta(B)Z_t$定义的 ARMA(p,q)过程，如果存在常数列$\{\pi_j\}$，满足$\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\pi_j|<\infty$，使得

$$Z_t=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j X_{t-j},\ t=0,\pm1,\cdots,$$

则称$\{X_t, t=0,\pm1,\cdots\}$为**可逆 ARMA(p,q) 过程**. 此性质称为**可逆性**.

7. 设$\{X_t, t=0,\pm1,\cdots\}$是 ARMA(p,q)序列，则$\{X_t, t=0,\pm1,\cdots\}$是可逆 ARMA(p,q)过程的充要条件是：$\theta(Z)=0$ 的根都在单位圆外. 系数$\{\pi_j\}$由

$$\pi(Z)=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j Z^j=\varphi(Z)/\theta(Z),\ |Z|\leqslant 1$$

所确定. $\pi(Z)=\psi^{-1}(Z)$又称为 ARMA **的逆函数**.

8. 设$\{X_t\}$是均值为零的平稳序列，其谱密度$f(\lambda)$是$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\lambda}$的有理函数

$$f(\lambda)=\sigma^2\frac{|\theta(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\lambda})|^2}{|\varphi(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\lambda})|^2},\ -\frac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2},$$

其中　$\varphi(\lambda)=1-\varphi_1\lambda-\cdots-\varphi_p\lambda^p$，　$\theta(\lambda)=1+\theta_1\lambda+\cdots+\theta_q\lambda^q$，且它们无公共因式. $\varphi(\lambda)$满足平稳性条件，$\theta(\lambda)$满足可逆性条件，则$\{X_t\}$是**有有理谱密度的平稳序列**.

9. 均值为零的平稳时间序列$\{X_t\}$满足$\varphi(B)X_t=\theta(B)Z_t$的充要条件是：$\{X_t\}$具有第 8 点中的有理谱密度.

疑难解析

1. 怎样进行时间序列分析?

答 当随机过程$\{X_t, t\in T\}$的参数集取 $T=\{1,2,\cdots\}$或 $T=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$时，$\{X_t, t\in T\}$称为随机序列. 当参数集 T 表示时间时，随机序列被称为时间序列. 时间序列可以表示为三部分，即

$$X_t=m_t+S_t+Y_t,$$

其中 m_t 与 S_t 是非随机项. m_t 又称为趋势项，反映了 X_t 的变化趋势，常用多项式或指数函数来描述；S_t 称为周期项，反映了 X_t 的周期性(如年、季、月)变化；Y_t 是随机噪声，反映了随机因素的影响，一般设 Y_t 是平稳随机序列.

时间序列的主要分析方法是，分析时间序列的统计规律，然后由此构造拟合它的最佳数学模型，利用模型预报时间序列的未来取值，或用来进行分析和控制.

上面的典型分解式的一个现实是非平稳时间序列. 处理的常用方法有两种. 方法一是估计和提取原数据中的趋势项与周期项，使估计后的残差可以用一个平稳时间序列的线性模型拟合，最后包括所估计的趋势项与周期项，由典型分析式对$\{X_t, t\in T\}$进行预报与控制. 方法二是由乔治与 E. P. 博克斯等人提出的，是对观测数据列$\{X_t, t\in T\}$反复作用差分算子，直到差分后的数据可以建立起恰当的平稳时间序列线性模型，以实现对$\{X_t, t\in T\}$进行预报与控制.

2. ARMA(p,q)过程与白噪声$\{Z_t\}$之间有什么关系?

答 若随机序列$\{Z_t, t=0,\pm1,\cdots\}$的均值为零、协方差为$\gamma(h)$ ($h=0, \gamma(h)=\sigma^2$; $h\neq0$, $\gamma(h)=0$)，则称$\{Z_t, t=0,\pm1,\cdots\}$是均值为零、方差为 σ^2 的白噪声，记为$\{Z_t\}\sim\mathrm{WN}(0,\sigma^2)$. 若$\{Z_t\}$是独立同分布、均值为零、方差为 σ^2 的随机序列，则记$\{Z_t\}$为 $\mathrm{HD}(0,\sigma^2)$.

当 ARMA(p,q)序列$\{X_t,\ t=0,\pm1,\cdots\}$能表示为既往的白噪声$\{Z_t\}$的加权和形式 $X_t=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\psi_j Z_{t-j}$，并且在均方收敛意义下成立，则$\{X_t,t=0,\pm1,\cdots\}$是因果 ARMA$(p,q)$过程. 加权和形式的物理意义是：ARMA$(p,q)$过程$\{X_t,\ t=0,\pm1,\cdots\}$可以由过去和现在的白噪声(随机输入冲量)通过线性系统来生成. 若将白噪声作为"因"，则 ARMA(p,q)过程就是"果"，因而称之为因果 ARMA(p,q)过程.

若 ARMA(p,q)序列$\{X_t,\ t=0,\pm1,\cdots\}$的差分方程 $\varphi(B)X_t=\theta(B)Z_t$ 中的白噪声$\{Z_t,\ t=0,\pm1,\cdots\}$能表示为既往$\{X_t\}$的加权和形式 $Z_t=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\pi_j X_{t-j}$，且表示式在均方收敛意义下成立，则$\{X_t,\ t=0,\pm1,\cdots\}$是可逆 ARMA$(p,q)$过程.

由上可知，我们必须认真分析 ARMA(p,q)过程与白噪声$\{Z_t\}$的关系.

方法、技巧与典型例题分析

本节的重点是，通过例题熟悉概念，明确类型.

例 1 用延拓算子 B 表示下列模型：

(1) $X_t-\varphi_1 X_{t-1}-\varphi_2 X_{t-2}=Z_t$；

(2) $X_t-\frac{1}{6}X_{t-1}-\frac{1}{6}X_{t-2}=Z_t$；

(3) $X_t-\varphi_1 X_{t-1}=Z_t-\theta_1 Z_{t-1}$；

(4) $X_t=Z_t-\theta_1 Z_{t-1}-\theta_2 Z_{t-2}$.

解 (1) $\varphi(B)=1-\varphi_1 B-\varphi_2 B^2$，$\theta(B)\equiv1$. 格林函数

$$\psi(B)=\frac{1}{\varphi(B)}=\frac{1}{1-\varphi_1 B-\varphi_2 B^2}=\sum_{k=0}^{\infty}G_k B^k.$$

由
$$(1-\varphi_1 B-\varphi_2 B^2)(G_0+G_1 B+G_2 B^2+\cdots)=1,$$

得 $G_0=1,\quad G_1=\varphi_1,\ G_k=\varphi_1 G_{k-1}+\varphi_2 G_{k-2},\quad k\geqslant 2.$

(2) $\varphi(B)=1-\frac{1}{6}B-\frac{1}{6}B^2,\theta(B)\equiv 1$. 格林函数

$$\psi(B)=\frac{1}{1-B/6-B^2/6}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1-B/2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1+B/3}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k+(-1)^k\frac{2}{5}(-1)^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]B^k.$$

由 $$\varphi(B)X_t=\theta(B)Z_t\Rightarrow X_t=\varphi(B)Z_t=\sum_{k=0}^{\infty}G_k Z_{t-k},$$

得 $$X_t=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k+(-1)^k\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]Z_{t-k}.$$

(3) $\varphi(B)=1-\varphi_1 B,\theta(B)=1-\theta_1 B$. 格林函数

$$\psi(B)=\frac{1-\theta_1 B}{1-\varphi_1 B}=(1-\theta_1 B)\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_1^k B^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_1^k B^k-\sum_{k=0}^{\infty}\theta_1\varphi_1^k B^{k+1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_1^{k-1}(\varphi_1-\theta_1)B^k,$$

所以 $G_0=1,\quad G_k=\varphi_1^{k-1}(\varphi_1-\theta_1),\quad k\geqslant 1.$

(4) $\varphi(B)=1,\theta(B)=1-\theta_1 B-\theta_2 B^2$. 逆函数

$$\pi(B)=\frac{1}{\theta(B)}=\frac{1}{1-\theta_1 B-\theta_2 B^2}.$$

由 $$(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2)\pi(B)=1,$$

得 $\pi_1=-\theta_1,\quad \pi_2=\pi_1\theta_1-\theta_2,\quad \pi_k=\theta_1\pi_{k-1}+\theta_2\pi_{k-2},\quad k\geqslant 3.$

例 2 判别下列过程的特性：

(1) MA(q)过程

$$X_t=Z_t+\theta_1 Z_{t-1}+\cdots+\theta_q Z_{t-q},\quad \{Z_t\}\sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2);$$

(2) AR(p)过程

$$X_t-\varphi_1 X_{t-1}-\cdots-\varphi_p X_{t-p}=Z_t,\quad \{Z_t\}\sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2).$$

解 (1) MA(q)过程满足因果性. 此时取

$$\psi_j=\begin{cases}\theta_j, & 0\leqslant j\leqslant q,\\ 0, & j>q,\end{cases}\quad \theta_0=1.$$

(2) AR(p)过程满足可逆性. 此时取

$$\pi_j=\begin{cases}-\varphi_j, & 0\leqslant j\leqslant p,\\ 0, & j>p,\end{cases}\quad \varphi_0=1.$$

例 3 确定下列 ARMA(p,q)过程的特性.

(1) $X_t=Z_t-Z_{t-1}+0.24Z_{t-2}$;

(2) $X_t-0.1X_{t-1}-0.2X_{t-2}=Z_t$;

(3) $X_t+0.2X_{t-1}-0.48X_{t-2}=Z_t-0.4Z_{t-1}+0.04Z_{t-2}$;

(4) $X_t-0.1X_{t-1}-0.2X_{t-2}=Z_t+2Z_{t-1}+Z_{t-2}$.

解 (1) $\theta(Z)=1-Z+0.24Z^2$,令 $\theta(Z)=0$,解得 $Z_1=2.5$, $Z_2=5/3$. 所以 $|Z_1|>1$, $|Z_2|>1$. 故过程是可逆 MA(2)过程.

(2) $\varphi(Z)=1-0.1Z-0.2Z^2$,令 $\varphi(Z)=0$,解得 $Z_1=2$, $Z_2=-2.5$. 所以 $|Z_1|>1$, $|Z_2|>1$. 故过程是因果 AR(2)过程.

(3) $\varphi(Z)=1+0.2Z-0.48Z^2$,令 $\varphi(Z)=0$,解得 $Z_1=-5/4$, $Z_2=5/3$,有 $|Z|>1$, $|Z_2|>1$.

又 $\theta(Z)=1-0.4Z+0.04Z^2$,令 $\theta(Z)=0$,解得 $Z_1=Z_2=5$,有 $|Z_1|=|Z_2|>1$.

综上所述可知,过程为因果可逆 ARMA(2,2)过程.

(4) $\varphi(Z)=1-0.1Z-0.2Z^2$,令 $\varphi(Z)=0$,解得 $Z_1=-5/4$, $Z_2=5/3$,有 $|Z_1|>1$, $|Z_2|>1$.

又 $\theta(Z)=1+2Z+Z^2$,令 $\theta(Z)=0$,解得 $Z_1=Z_2=1$. 故 $|Z_1|=|Z_2|=1$.

综上所述可知,过程为因果可逆 ARMA(2,2)过程.

例 4 设$\{X_t\}$是 AR(2)或 ARMA($2,q$)模型,其 $\varphi(B)=1-\varphi_1B-\varphi_2B^2$,求$\{X_t\}$的平稳域.

解 令 $\varphi(B)=0$,解得 $B_{1,2}=\frac{1}{2\varphi_2}\left[-\varphi_1\mp\sqrt{\varphi_1^2-4\varphi_2}\right]$. 利用韦达定理,因为

$$B_1B_2=-1/\varphi_2, B_1+B_2=-\varphi_1/\varphi_2,$$

知 $|\varphi_2|=1/|B_1,B_2|<1$，即 $|\varphi_2|<1$. 又

$$\varphi_2\pm\varphi_1=\frac{1}{B_1B_2}\pm\frac{B_1+B_2}{B_1B_2}=1-\left(1\mp\frac{1}{B_1}\right)\left(1\mp\frac{1}{B_2}\right),$$

若 B_1,B_2 是实根，则 $\varphi_2\pm\varphi_1<1$，若 B_1,B_2 是复根，则因为$\overline{B_1}=B_2$，故

$$\overline{(1\mp1/B_1)}=1\mp1/B_2,$$

于是
$$\varphi_2\pm\varphi_1=1-|1\mp1/B_1|^2<1.$$

故平稳域为

$$\Phi^{(2)}=\{(\varphi_1,\varphi_2):-1<\varphi_2<1,\varphi_2\pm\varphi_1<1\}.$$

由此得知，ARMA(2,q)过程是因果 ARMA(2,q)过程的充要条件是：自回归多项式 $\varphi(B)=1-\varphi_1B-\varphi_2B^2$ 满足条件

$$\varphi_2\mp\varphi_1=1,\ |\varphi_2|<1.$$

平稳域图形如图 9.1 所示.

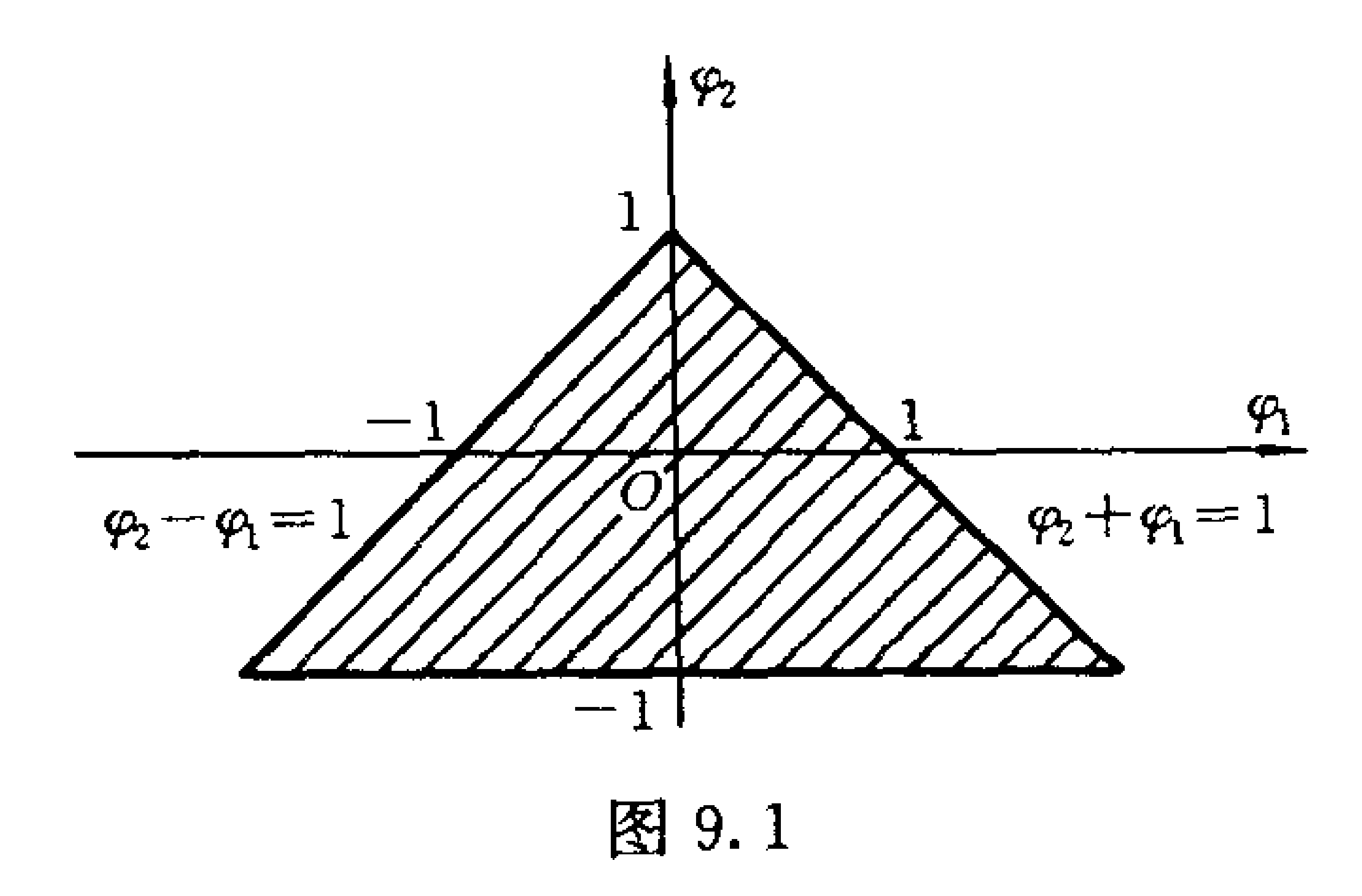


图 9.1

第二节　ARMA(p,q)过程的性质

主 要 内 容

1. MA(q)过程的协方差函数和相关(系数)函数

设$\{X_t,t=0,\pm1,\cdots\}$是 MA(q)过程，则其协方差函数 $\gamma(k)$与相关(系数)函数 $\rho(k)$分别为

$$\gamma(k)=\begin{cases}\sigma^2(1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2), & k=0,\\ \sigma^2(\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\cdots+\theta_{q-k}\theta_q), & 1\leqslant k\leqslant q,\\ 0, & h>q;\end{cases}$$

$$\rho(k)=\begin{cases}1, & k=0,\\ \dfrac{\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\cdots+\theta_{q-k}\theta_q}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_n^2}, & 1\leqslant k\leqslant q,\\ 0, & k>q.\end{cases}$$

$\rho(k)$当$k>q$时全为零的性质称为q **步截尾性**.

2. 设均值为零的平稳时间序列$\{X_t\}$具有谱密度$f(\lambda)>0$,则$\{X_t\}$是MA(q)序列的充要条件是:它的相关(系数)函数q步截尾.

3. 设$\{X_t\}$是均值为零的平稳过程,协方差函数为$\gamma(t)$,当$|k|>q$时,$\gamma(k)=0$,$\gamma(q)\neq0$,则$\{X_t\}$是MA(q)过程,即存在白噪声$\{Z_t\}$,使得

$$X_t=Z_t+\theta_1Z_{t-1}+\cdots+\theta_qZ_{t-q}.$$

4. AR(p)过程的协方差函数和相关(系数)函数

设$\{X_t,t=0,\pm1,\cdots\}$是AR(p)过程,则其协方差函数和相关(系数)函数满足方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{\gamma}_p=\Gamma_p\boldsymbol{\varphi},\\ \boldsymbol{\rho}_p=R_p\boldsymbol{\varphi}.\end{cases}$$

其中$\boldsymbol{\gamma}_p=(\gamma(1),\gamma(2),\cdots,\gamma(p))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\Gamma}_p=[\gamma(i-j)]_{i,j=1}^p$,

$$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\rho}_p=(\rho(1),\rho(2),\cdots,\rho(p))^{\mathrm{T}},$$

$$R_p=[\rho(i-j)]_{i,j=1}^p,\quad \boldsymbol{\sigma}^2=\gamma(0)-\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_p.$$

方程组$\boldsymbol{\gamma}_p=\Gamma_p\boldsymbol{\varphi}$和$\boldsymbol{\rho}_p=R_p\boldsymbol{\varphi}$称为尤拉-沃尔克方程组.

5. $\{X_t,t=0,\pm1,\cdots\}$为ARMA(p, q)过程的充要条件是:其协方差函数满足差分方程

$$\gamma(k)-\varphi_1\gamma(k-1)-\cdots-\varphi_p\gamma(k-p)=\begin{cases}0, & k>q,\\ \theta_q\sigma^2, & k=q,\end{cases}$$

或其相关函数满足：

$k=0$ 时，$\sigma_X^2(1-\varphi_1\rho_1-\cdots-\varphi_p\rho_p)=(1-\theta_1G_1-\cdots-\theta_qG_q)\sigma_Z^2$，

$k=1$ 时，$\sigma_X^2(1-\varphi_1\varphi_0-\cdots-\varphi_p\rho_{p-1})=(\theta_1-\theta_2G_1-\cdots-\theta_qG_{q-1})\sigma_Z^2$，

$k=q$ 时，$\sigma_X^2(\rho_q-\varphi_1\rho_{q-1}-\cdots-\varphi_p\rho_{p-q})=\theta_q\sigma_Z^2$，

$k>q$ 时，$\rho_k-\varphi_1\rho_{k-1}-\cdots-\varphi_p\rho_{p-q}=0$，即 $\varphi(B)\rho_k=0$.

6. 在均值为零的平稳时间序列中，给定 $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-k+1}$，$X_t$ 与 X_{t-k}之间的偏相关函数定义为

$$\frac{E[X_tX_{t-k}]}{\sqrt{E[X_t^2]E[X_{t-k}^2]}}=\frac{E[X_tX_{t-k}]}{\sigma_X^2}.$$

其中 E 表示条件密度函数 $f(x_tx_{t-k}\,|\,x_{t-1},\cdots,\ x_{t-k+1})$的条件期望.

(1) AR(p)序列的偏相关（系数）函数是

$$\varphi_{kk}=\frac{E[X_tX_{t-k}]}{\sigma_X^2}\quad(\varphi_{00}=1).$$

它又是 AR(k)模型的最后一个自回归系数 φ_k.

(2) ARMA(p,q)序列的偏相关（系数）函数. 用 $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-k}$对 X_t 作最小方差估计，使 Q 为最小值，$\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \cdots, \varphi_{kk}$应满足方程组

$$\frac{\partial Q}{\partial\varphi_{k_j}}=0,\ j=1,2,\cdots,k.$$

该方程组经推导化为矩阵式

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(k-2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \rho(1) \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \cdots & \rho(1) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_{k1}\\ \varphi_{k2}\\ \vdots \\ \varphi_{kk}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho(1)\\ \rho(2)\\ \vdots\\ \rho(k)\end{bmatrix},$$

其中系数矩阵称为托布里兹矩阵. 系数 φ_{kj} ($j=1,2,\cdots,k$)可由矩阵式直接求得，求 φ_{kj} 的常用递推式是

$$\begin{cases}\varphi_{11}=\rho(1),\\ \varphi_{k+1\,k+1}=\left(\rho(k+1)-\sum_{j=1}^{k}\rho(k+1-j)\varphi_{kj}\right)\Big/\left(1-\sum_{j=1}^{k}\rho(j)\varphi_{kj}\right),\\ \varphi_{k+1\,j}=\varphi_{kj}-\varphi_{k+1\,k+1}\varphi_{k\,k+1},\ j=1,2,\cdots,k.\end{cases}$$

把 MA(q)看做 $p=0$ 的特例，把 AR(p)看做 $q=0$ 的特例，则上述公式仍然适用.

疑 难 解 析

1. 什么是相关系数的截尾性和拖尾性?

答 由 MA(q)过程关于协方差函数和相关（系数）函数的定理知，当 $k>q$ 时，$\gamma(k)=0,\rho(k)=0$，而 $\gamma(q)\neq0$，$\rho(q)\neq0$. 这个性质被称为 MA(q)序列的协方差函数和相关（系数）函数是 q 步截尾的. 它表明：若$\{X_t,\ t=0,\pm1,\cdots\}$是 MA($q$)序列. 且$|i-j|>q$，则 X_i 与 X_j 不相关，即序列只有有限项相关，反映了MA(q)序列的本质特征.

而对 ARMA(p,q)过程和 AR(p)过程，其协方差函数与相关（系数）函数不具有某步之后的截尾性. 如由 AR(p)的差分方程 $\varphi(B)\gamma(k)=0,k>0$ 知，若 $\varphi(Z)=0$ 没有重根，则有

$$\gamma(k)=c_1Z_1^{-k}+c_2Z_2^{-k}+\cdots+c_pZ_p^{-k},\quad k>-p,$$

其中 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_p$ 是 $\varphi(Z)$的相异实根，$c_1,c_2,\cdots,c_p$ 是待定系数. 若 $\varphi(Z)=0$ 有重根，设 $Z_1=Z_2=\cdots=Z_r$，则有

$$\gamma(k)=(c_1+c_2k+\cdots+c_rk^{r-1})Z_1^{-k}+c_{r+1}Z_{r+1}^{-k}+\cdots+c_pZ_p^{-k},$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_p$ 为待定常数. 两式中的待定常数均可根据 $\gamma(0)=1,\gamma(k)=\gamma(-k)$来确定. 所以由差分方程理论可求出协方差函数 $\gamma(k)$的一般表达式，且知其被负指数函数控制，即有

$$|\gamma(k)|<b_1\mathrm{e}^{-b_2k},\quad b_1,b_2>0$$

相关（系数）函数 $\rho(k)$也有同样的性质. 这种按负指数函数递减的性质，称为拖尾性. ARMA(p,q)序列与 AR(p)序列的协方差函

数与相关(系数)函数都有拖尾性.

2. 什么是偏相关(系数)函数?

答 偏相关(系数)函数与相关(系数)函数一样,反映了平稳过程的独立性结构的重要信息,而且仅与过程的二阶矩有关.偏相关(系数)函数 $\varphi_{kk}(k\geqslant 0)$是将 X_{k+1} 与 X_1 分别扣除它们用 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 作的最佳线性估计后的剩余量之间的相关(系数)函数,所以称为"偏"相关.

方法、技巧与典型例题分析

要计算相关(系数)函数和偏相关(系数)函数,首先要弄清的是公式的来历与意义,然后才能应用公式进行计算.特别的是,在不同的书本上公式的形式是不同的,知道其为什么,使用时才不会搞错.例如:

(1) 在 MA(q)序列的协方差函数和相关(系数)函数公式中,当 $1\leqslant k\leqslant q$ 时,有

$$\gamma(k)=\sigma^2(\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\cdots+\theta_{q-k}\theta_q),$$

$$\rho(k)=\frac{\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\cdots+\theta_{q-k}\theta_q}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_n^2},$$

而在有的教材中,公式中的"θ_k"是用"$-\theta_k$"代替的,这是因为在方程 $X_t=\theta(B)Z_t$ 中,将

$$\theta(B)=1+\theta_1 B+\cdots+\theta_q B^q$$

换成了

$$\theta(B)=1-\theta_1 B-\cdots-\theta_q B^q$$

(2) 偏相关(系数)函数可以按主要内容 6 的方法求,也可以按另一种定义——偏相关(系数)函数 $\alpha(\cdot)$定义为

$$\alpha(1)=\rho(X_2,\ X_1)(1),$$

$$\alpha(k)=\rho_{(X_{k+1}-P_{\overline{sp}(1,X_2,\cdots,X_k)}X_{k+1},X_1-P_{\overline{sp}(1,X_2,\cdots,X_k)}}X_1^{(k)},\quad k\geqslant 2,$$

其中,$P_{\overline{sp}(1,X_2,\cdots,X_n)}X_{k+1}$ 和 $P_{\overline{sp}(1,X_2,\cdots,X_k)}X_1$ 可由下式求出.

$$\begin{cases} P_{\overline{sp}(1,X_2,\cdots,X_n)}X = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i X_t,\ X_0 = 1, \\ \sum_{i=0}^{k}\alpha_i E(X_i X_j) = E(XX_j),\ j = 0,1,\cdots,k. \end{cases}$$

例 1 已知 MA(2)过程 $X_t = Z_t - Z_{t-1} + 0.24Z_{t-2}$，求相关(系数)函数.

解 因为 $\theta_1 = -1, \theta_2 = 0.24$，故

$$\rho(0)=1,$$

$$\rho(1)=\frac{\theta_1+\theta_2\theta_1}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}=\frac{-1-0.24}{1+1+(0.24)^2}\approx -0.6026,$$

$$\rho(2)=\frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}=\frac{0.24}{1+1+(0.24)^2}\approx 0.1166,$$

$$\rho(k)=0,\ k>2.$$

例 2 已知 MA(2)模型 $X_t = Z_t + 0.5Z_{t-1} - 0.3Z_{t-2}$，求相关(系数)函数，并讨论可逆性.

解 因为 $\theta_1 = 0.5,\ \theta_2 = -0.3$，故

$$\rho(0)=1,$$

$$\rho(1)=\frac{\theta_1+\theta_2\theta_1}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}=\frac{0.5-0.15}{1+(0.5)^2+(-0.3)^2}\approx 0.2612,$$

$$\rho(2)=\frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}=\frac{-0.3}{1+(0.5)^2+(-0.3)^2}\approx 0.2239,$$

$$\rho(k)=0,\ k>2.$$

解 $\theta(B) = 1 + 0.5B - 0.3B^2 = 0$，得 $B_1 \approx 1.17,\ B_2 \approx -2.84$，由 $|B_1|>1,\ |B_2|>1$ 知，MA(2)模型满足可逆性条件.

例 3 求 AR(1)和 AR(2)过程的相关(系数)函数. 设AR(1)：$X_t - \varphi_1 X_{t-1} = Z_t$；AR(2)：$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} = Z_t$.

解 AR(1)时，由公式得 $\gamma(1) = \gamma(0)\varphi_1$. 由数学归纳法可证 $\gamma(k) = \gamma(0)(\varphi_1)^k$，因此，得

$$\rho(k) = (\varphi_1)^k,\ k>0.$$

AR(2)时，由 $\boldsymbol{\rho}_p=R_p\boldsymbol{\varphi}$ 得

$$\begin{pmatrix}\rho(1)\\ \rho(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \rho(1)\\ \rho(1) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix},$$

解得
$$\rho(1)=\frac{\varphi_1}{1-\varphi_2},\quad \rho(2)=\frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2}+\varphi_2.$$

并由差分方程可以解得 $\rho(k)=c_1Z_1^{-k}+c_2Z_2^{-k}\ k>-2$，其中 Z_1,Z_2 是方程 $1-\varphi_1Z-\varphi_2Z^2=0$ 的两个相异实根，c_1,c_2 满足 $\rho(0)=1$，$\rho(1)=\rho(-1)$.

例 4 求 AR(2)模型 $X_t-0.1X_{t-1}-0.4X_{t-2}=Z_t$ 的相关(系数)函数，并讨论其平稳性.

解 因为 $\varphi(B)=1-0.1B-0.4B^2=0$ 的根 $B_1\approx1.5$，$B_2\approx-1.75$，所以 $|B_1|>1$，$|B_2|>1$. 模型满足平稳性条件. 由

$$\rho(1)=\frac{\varphi_1}{1-\varphi_2},\quad \rho(k)=\varphi_1\rho(k-1)+\varphi_2\rho(k-2),\ k\geqslant2$$

得 $\rho(1)=\dfrac{0.1}{1-0.4}\approx0.1667$，$\rho(2)\approx0.6167$，$\rho(3)\approx0.1268,\cdots$.

例 5 求 ARMA(1,1)模型的相关(系数)函数.

解 ARMA(1,1)模型是 $X_t-\varphi_1X_{t-1}=Z_t+\theta_1Z_{t-1}$.

设 Z_i 的方差为 σ_Z^2，$|\varphi_1|<1$，则有

$$X_i=G(B)Z_i=\frac{1-\theta_1B}{1-\varphi_1B}Z_i.$$

比较恒等式

$$\begin{aligned}G_0+G_1B+G_2B^2+\cdots&=(1-\theta_1B)(1+\varphi_1B+\varphi_1^2B^2+\cdots)\\&=1+(\varphi_1-\theta_1)B+(\varphi_1^2-\varphi_1\theta_1)B^2+\cdots,\end{aligned}$$

故
$$G_0=1,\quad G_1=\varphi_1-\theta_1,\quad G_2=\varphi_1^2-\varphi_1\theta_1.$$

代入公式得

$$\begin{cases}\sigma_X^2(1-\varphi_1\rho(1))=(1-\theta_1G_1)\sigma_Z^2=[1-\theta_1(\varphi_1-\theta_1)]\sigma_Z^2,\ k=0,\\ \sigma_X^2(\varphi_1-\rho(1))=\theta_1\sigma_Z^2,\ k=1,\\ \rho(k)=\varphi_1\rho(k-1),\ k>1.\end{cases}$$

解得 $\sigma_x^2=\dfrac{1+\theta_1^2-2\varphi_1\theta_1}{1-\varphi_1^2}$， $\rho(1)=\dfrac{(\varphi_1-\theta_1)(1-\varphi_1\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\varphi_1\theta_1}$，

$$\rho(k)=\varphi_1^{k-1}\frac{(\varphi_1+\theta_1)(1+\varphi_1\theta_1)}{1+\theta_1^2+2\varphi_1\theta_1},\ k\geqslant 1.$$

例 6 证明 ARMA(p,q)过程$\{X_t,t=0,\pm1,\cdots\}$的协方差函数满足差分方程

$$\gamma(k)-\varphi_1\gamma(k-1)-\cdots-\varphi_p\gamma(k-p)=\sigma^2\sum_{k<j<q}\theta_j\varphi_{j-k},$$
$$0\leqslant k<\max(p,q+1),$$
$$\gamma(k)-\varphi_1\gamma(k-1)-\cdots-\varphi_p\gamma(k-p)=0,\ k>\max(p,q+1),$$

其中，$\{\psi_j\}$ 由 $\psi(Z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\psi_jZ_j=\dfrac{\theta(Z)}{\psi(Z)}$，$|Z|\leqslant 1$ 确定.

证 对下式两边同乘以 X_{t-k}，

$X_t-\varphi_1X_{t-1}-\cdots-\varphi_pX_{t-p}=Z_t+\theta_1Z_{t-1}+\cdots+\theta_qZ_{t-q}$ 再取均值. 因为 $X_{t-k}=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\psi_jZ_{t-k-j}$，得

$$\gamma(k)-\varphi_1\gamma(k-1)-\cdots-\varphi_p\gamma(k-p)$$
$$=E\left[(Z_t+\theta_1Z_{t-1}+\cdots+\theta_qZ_{t-q})\left(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_jZ_{t-k-j}\right)\right].$$

当 $0\leqslant k\leqslant\max(p,q+1)$时，上式变为

$$\gamma(k)-\varphi_1\gamma(k-1)-\cdots-\varphi_p\gamma(k-p)=\sigma^2\sum_{k<j<q}^{\infty}\theta_j\psi_{j-k},$$

当 $k\geqslant\max(p,q+1)$时，上式变为

$$\gamma(k)-\varphi_1\gamma(k-1)-\cdots-\varphi_p\gamma(k-p)=0.$$

例 7 证明 ARMA(p,q)过程 $\varphi(B)X_t=\theta(B)Z_t$ 的协方差函数 $\gamma(k)$满足 $\gamma(k)=\sigma^2\sum\limits_{j=0}^{\infty}\psi_j\psi_{j+|k|}$. $\{\psi_j\}$ 由

$$\psi(Z)=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_jZ_j=\frac{\theta(Z)}{\varphi(Z)},\ |Z|\leqslant 1$$

确定.

证 $\gamma(k)=E[X_tX_{t+k}]=E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_jZ_{t-j}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\psi_iZ_{t+k-i}\right)\right]$

$$=\sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\psi_{j+|k|},$$

将 $\psi(Z)=\theta(Z)/\varphi(Z)$ 写为 $\psi(Z)\varphi(Z)=\theta(Z)$，比较 Z_j 的系数，得到方程组

$$\begin{cases}\psi_j-\sum\limits_{0<k<j}\varphi_k\psi_{j-k}=\theta_j,\ 0\leqslant j\leqslant\max(p,q+1),\\ \psi_j-\sum\limits_{0<k<p}\varphi_k\psi_{j-k}=0,\ j\geqslant\max(p,q+1),\end{cases}$$

其中 $\theta_0=1$，当 $j>q$ 时，$\theta_j=0$；当 $j>p$ 时，$\varphi_j=0$. 故由方程组解得

$$\psi_0=\theta_0=1,\quad \psi_1=\theta_0+\varphi_0\varphi_1=\theta_1+\varphi_1,$$

$$\psi_2=\theta_2+\psi_0\varphi_2+\psi_1\varphi_1=\theta_2+\varphi_2+\theta_1\varphi_1+\varphi_1^2,\cdots.$$

例 8 设有均值为零的 AR(1)过程

$$X_t=0.9X_{t-1}+Z_t,\ \{Z_t\}\sim\mathrm{WN}(0,\sigma^2),$$

求偏相关(系数)函数 $\alpha(k)$.

解 $\alpha_1=\mathrm{Corr}(X_2,X_1)=\mathrm{Corr}(0.9X_1+Z_2,\ X_1)=0.9$,

而 $$P_{\overline{sp}(X_2,X_3,\cdots,X_k)}X_{k+1}=0.9X_k,$$

且 $(X_1,X_2,\cdots,X_k)^{\mathrm T}$ 与 $(X_{k+1},X_k,\cdots,X_2)^{\mathrm T}$ 的协方差矩阵相同，故

$$P_{\overline{sp}(X_2,X_3,\cdots,X_k)}X_1=0.9X_2,$$

所以，当 $k\geqslant2$ 时，有

$$\alpha(k)=\mathrm{Corr}(X_{k+1}-0.9X_k,\ X_1-0.9X_2)=0,$$

其中 Corr(·,·)表示求两个量的相关(系数)函数.

例 9 设有 AR(2)模型

$$X_t+0.5X_{t-1}-0.4X_{t-2}=Z_t,$$

求偏相关(系数)函数.

解 由例 4 已知

$\rho(0)=1$， $\rho(1)=\varphi_1/(1-\varphi_2)$， $\rho(1)=\varphi_1\rho(k-1)+\varphi_2\rho(k-2)$.

因为
$$\varphi_1=-0.5,\quad \varphi_2=0.4,$$
故
$$\varphi_{11}=\rho(1)=-0.833,$$
$$\varphi_{22}=(\rho(2)-\rho(1)\varphi_{11})(1-\rho(1)\varphi_{11})^{-1}=0.4,$$
$$\varphi_{kk}=0, k\geqslant 2.$$

例 10 设有 MA(1)过程

$X_t=Z_t+\theta Z_{t-1}$，$|\theta|<1$，$\{Z_t\}\sim WN(0,\sigma^2)$，求偏相关系数 $\alpha(1),\alpha(2)$.

解 $\alpha(1)=\rho(1)=\dfrac{\gamma(1)}{\gamma(0)}=\dfrac{\theta\sigma^2}{(1+\theta^2)\sigma^2}=\dfrac{\theta}{1+\theta^2}$.

因为
$$P_{\overline{sp}\{X_2\}}X_3=\left(\frac{\theta}{1+\theta^2}\right)X_2=P_{\overline{sp}(X_2)}X_1,$$

故 $\alpha(2)=\mathrm{Corr}\left(X_3-\dfrac{\theta}{1+\theta^2}X_2, X_1-\dfrac{\theta}{1+\theta^2}X_2\right)=\dfrac{-\theta^2}{1+\theta^2+\theta^4}$.

例 11 设有 ARMA(1,1)模型
$$X_t-0.5X_{t-1}=Z_t-0.3Z_{t-1},$$
求偏相关(系数)函数.

解 由例 5 知，相关函数为
$$\rho(k)=\varphi_1^{k-1}\frac{(\varphi_1-\theta_1)(1-\varphi_1\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\varphi_1\theta_2},\ k\geqslant 1,$$
其中 $\varphi_1=0.5,\theta_1=0.3$，代入即得
$$\rho(k)=0.215\times(0.5)^{k-1},\quad k\geqslant 1.$$
故
$$\varphi_{11}=\rho(1)=0.215,$$
$$\varphi_{22}=(\rho_2-\rho_1\varphi_{11})/(1-\rho_1\varphi_{11})=0.113,$$
$$\varphi_{21}=\varphi_{11}-\varphi_{22}\varphi_{11}=0.191.$$
继续下去可得 $\varphi_{31}=0.19,\varphi_{32}=0.111,\cdots$.

例 12 求 MA(1)过程的偏相关(系数)函数 φ_{kk}，$k\geqslant 1$.

解 由 MA(q)过程的协方差函数公式和相关(系数)函数公

式(见主要内容 1)得

$$\gamma(0)=(1+\theta^2)\sigma^2,\quad \gamma(1)=\theta\sigma^2,\quad \gamma(k)=0,\quad k\geqslant 2;$$

$$\rho(0)=1,\quad \rho(1)=\frac{\theta}{1+\theta^2},\quad \rho(k)=0,\quad k\geqslant 2.$$

由平稳序列的最小方差线性预报得到公式

$$\begin{bmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(n-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho(n-1) & \rho(n-2) & \rho(n-3) & \cdots & \rho(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{n1} \\ \varphi_{n2} \\ \vdots \\ \varphi_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(n) \end{bmatrix},$$

利用公式,有方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & & & \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & & \\ & \rho(1) & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \rho(1) \\ & & & \rho(1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{k1} \\ \varphi_{k2} \\ \vdots \\ \varphi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中 $\rho(1)=\frac{\theta}{1+\theta^2}$,方程组等价于

$$\begin{bmatrix} 1+\theta^2 & \theta & & & \\ \theta & 1+\theta^2 & \theta & & \\ & \theta & 1+\theta^2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \theta \\ & & & \theta & 1+\theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{k1} \\ \varphi_{k2} \\ \vdots \\ \varphi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

经过一系列的求解过程(包括行列式展开,解特征方程、差分方程),最后解得

$$\varphi_{11}=\rho(1)=\frac{\theta}{1+\theta^2},$$

$$\varphi_{kk}=\frac{(1-\theta^2)(-1)^{k+1}\theta^k}{1-\theta^{2(k+1)}},\quad k\geqslant 2.$$

第三节　平稳时间序列的模型拟合

主 要 内 容

一、模型识别

1. 若$\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$是平稳时间序列$\{X_t\}$的一个样本函数,则定义**样本协方差函数为**

$$\widehat{\gamma}(k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-k}X_iX_{i+k},\ k=0,1,\cdots,n-1.$$

定义**样本相关(系数)函数为**

$$\widehat{\rho}(k)=\widehat{\gamma}(k)/\widehat{\gamma}(0),\ k=0,1,\cdots,n-1.$$

$\widehat{\gamma}(k)$和$\widehat{\rho}(k)$分别是平稳时间序列$\{X_t,\ t=0,\pm1,\cdots\}$的协方差函数和相关(系数)函数的**估计量**.

在实际问题中,一般取$n>50$,且估计误差随k增大,故一般取$k<N/10\sim N/4$.

2. 样本偏相关(系数)函数的递推公式是

$$\widehat{\varphi}_{11}=\widehat{\rho}(1),$$

$$\widehat{\varphi}_{k+1\,k+1}=\Big(\widehat{\rho}(k+1)-\sum_{j=1}^{k}\widehat{\rho}(k+1-j)\widehat{\varphi}_{kj}\Big)\cdot\Big(1-\sum_{j=1}^{k}\widehat{\rho}(j)\widehat{\varphi}_{kj}\Big)^{-1},$$

$$\widehat{\varphi}_{k+1\,j}=\widehat{\varphi}_{kj}-\widehat{\varphi}_{k+1\,k+1}\widehat{\varphi}_{k\,k+1-j},\ j=1,2,\cdots,k.$$

递推顺序是:φ_{11};φ_{22},φ_{21};φ_{33},φ_{31},φ_{32};φ_{44},$\cdots$.

3. 设$\{X_t\}$是平稳正态MA(q)过程,则

(1) $\widehat{\rho}(k)$是$\rho(k)$的渐近无偏估计和相容估计,即当$n\to\infty$时,$E[\widehat{\rho}(k)]\to\rho(k)$, $\widehat{\rho}(k)\xrightarrow{P}\rho(k)$.

(2) 当$k>q$时,$\sqrt{n}[\widehat{\rho}(k)-\rho(k)]$渐近于$N(0,\ 1+2\sum_{i=1}^{q}\rho^2(i))$.

4. 设$\{X_t\}$是平稳正态 AR(p)过程，则

(1) $\hat{\varphi}_{kk}$是φ_{kk}的渐近无偏估计和相容估计，即当$n\to\infty$时，
$E[\hat{\varphi}_{kk}]\to\varphi_{kk}$，$\hat{\varphi}_{kk}\xrightarrow{P}\varphi_{kk}$；

(2) 当$k>p$时，$\sqrt{n}(\hat{\varphi}_{kk}-\varphi_{kk})$渐近于$N(0,1)$.

二、模型的参数估计

1. AR(p)模型的参数的尤拉-沃尔克估计

设确定$\{X_t\}$的模型是

$$X_t-\varphi_1X_{t-1}-\cdots-\varphi_pX_{t-p}=Z_t,\{Z_t\}\sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2),$$

则$\hat{\varphi}=(\hat{\varphi}_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)^{\mathrm{T}}$与$\sigma^2$的尤拉-沃尔克估计是

$$\begin{bmatrix}\hat{\varphi}_1\\\hat{\varphi}_2\\\vdots\\\hat{\varphi}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\hat{\rho}(1)&\hat{\rho}(2)&\cdots&\hat{\rho}(p-1)\\\hat{\rho}(1)&1&\hat{\rho}(1)&\cdots&\hat{\rho}(p-2)\\\hat{\rho}(2)&\hat{\rho}(1)&1&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&\hat{\rho}(1)\\\hat{\rho}(p-1)&\hat{\rho}(p-2)&\cdots&\hat{\rho}(1)&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\rho}(1)\\\hat{\rho}(2)\\\vdots\\\hat{\rho}(p)\end{bmatrix},$$

$$\hat{\sigma}_Z^2=\hat{\gamma}(0)-\sum_{j=1}^{p}\hat{\varphi}_j\hat{\gamma}(j)=\hat{\gamma}_0\left(1-\sum_{j=1}^{p}\hat{\varphi}_j\hat{\rho}_j\right).$$

2. MA(q)模型的参数估计

设$\{X_t\}$的模型是

$$X_t=Z_t+\theta_1Z_{t-1}+\cdots+\theta_qZ_{t-q},\quad \{Z_t\}\sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2),$$

则
$$\begin{cases}\sigma_Z^2=\hat{\gamma}_0/(1+\hat{\theta}_1^2+\cdots+\hat{\theta}_q^2),\\\hat{\theta}_1=-\hat{\gamma}(1)/\hat{\sigma}_Z^2+\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2+\cdots+\hat{\theta}_{q-1}\hat{\theta}_q,\\\hat{\theta}_2=-\hat{\gamma}(2)/\hat{\sigma}_Z^2+\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2+\cdots+\hat{\theta}_{q-2}\hat{\theta}_q,\\\hat{\theta}_{q-1}=-\hat{\gamma}(q-1)/\hat{\sigma}_Z^2+\hat{\theta}_1\hat{\theta}_q,\\\hat{\theta}_q=-\hat{\gamma}(q)/\hat{\sigma}_Z^2.\end{cases}$$

3. ARMA(p,q)模型的参数估计

设$\{X_t\}$的模型是

$$X_t-\varphi_1 X_{t-1}-\cdots-\varphi_p X_{t-p}=Z_t-\theta_1 Z_{t-1}-\cdots-\theta_q Z_{t-q},$$

则 (1) 先按 AR 部分参数估计值 $\widehat{\varphi}_k$；

(2) 令 $Y_t=X_t-\widehat{\varphi}_1 X_{t-1}-\cdots-\widehat{\varphi}_p X_{t-p}$，求出

$$\widehat{\gamma}_k(Y)=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}\widehat{\varphi}_i\widehat{\varphi}_j\widehat{\gamma}(k+j-1)\ (\widehat{\varphi}_0=-1);$$

(3) 把$\{Y_i\}$看做 MA(q)序列，估计 $\widehat{\sigma}_Z^2,\widehat{\theta}_1,\cdots,\widehat{\theta}_q$.

三、模型拟合优度检验

设$\{Z_t\}$为 ARMA(p,q)模型，即

$$Z_t=X_t-\varphi_1 X_{t-1}-\cdots-\varphi_p X_{t-p}-\theta_1 Z_{t-1}-\cdots-\theta_q Z_{t-q},$$

代入参数估计值$\{\widehat{\varphi}_i\}$和$\{\widehat{\theta}_j\}$及观测值，当 $t\leqslant 0$ 时，$X_t=0,Z_t=0$. 由上式解出序列 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$.

检验 $H_0:\{Z_t,\ t=1,2,\cdots,n\}$是白噪声序列.

(1) 利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 计算的协方差函数和相关(系数)函数的估计值为

$$\widehat{\gamma}_Z(k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-k}Z_iZ_{i+k},\quad \widehat{\rho}_Z(k)=\widehat{\gamma}_Z(k)/\widehat{\gamma}_Z(0).$$

(2) 作 $Q=n\sum_{k=1}^{M}[\widehat{\rho}_Z(k)]^2$，其中 M 取 $n/10$ 左右.

(3) 在显著性水平 α 下检验假设 H_0:Q 服从自由度为 M 的χ^2分布. 即，从χ^2分布表查出满足 $P\{\chi^2<\chi_\alpha^2(M)\}=1-\alpha$ 的值$\chi^2\alpha(M)$.

当 $Q\geqslant\chi_\alpha^2(M)$时，拒绝 H_0，认为模型不适合.

当 $Q\leqslant\chi_\alpha^2(M)$时，接受 H_0，认为模型适合.

疑 难 解 析

什么是平稳时间序列的模型拟合？它有哪些步骤？

答 平稳时间序列的模型拟合是指对于平稳时间序列

$\{X_t,\ t=0,\pm 1,\cdots\}$，根据观测得到的数据，寻找一个与之适合的数学模型，使之能利用模型作为真实序列的近似描述，以实现预测与控制的目的.

ARMA(p,q)模型拟合的主要内容是：第一，模型识别，确定模型的类别及估计阶数 p,q；第二，估计参数 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q)^{\mathrm{T}}$ 及 σ^2，即模型参数估计.

ARMA(p,q)模型拟合的基本步骤如下：

(1) 模型识别. 由平稳时间序列的一个样本函数计算样本相关（系数）函数和样本偏相关（系数）函数，并由它们的截尾性和拖尾性进行模型类别的判断和阶的初估计.

(2) 模型的参数估计.

(3) 模型的拟合优度检验. 即用数理统计方法（一般用χ^2检验法）检验模型是否合适.

因此，平稳时间序列的 ARMA(p,q)模型拟合的工作量很大，要求也很高.

方法、技巧与典型例题分析

严格地按照拟合步骤进行分析、计算及检验. 得到一个合适的模型是可行的.

例 1 求拟合 MA(1)模型

$$X_t=Z_t+\theta Z_{t-1},\ \{Z_t\}\sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$$

的参数 θ 和 σ^2 的估计.

解 取 $q=1,\theta_1=\theta$，代入公式得

$$\begin{cases}\hat{\gamma}(0)=\hat{\sigma}^2(1+\hat{\theta}^2),\\ \hat{\gamma}(1)=\hat{\sigma}^2\hat{\theta}.\end{cases}$$

由后式得 $\hat{\theta}=\hat{\gamma}(1)/\hat{\sigma}_2$，再代入前式，解得

$$\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{2}\widehat{\gamma}(0)(1\pm\sqrt{1-4\widehat{\rho}^2(1)}),$$

$$\widehat{\theta}=\widehat{\gamma}(1)/\widehat{\sigma}_2=2\widehat{\rho}(1)(1\pm\sqrt{1-4\widehat{\rho}^2(1)}).$$

其中“ ±”号的选择原则是,取使$|\theta|<1$的那一个$\widehat{\theta}$的符号.而

$$\frac{2\widehat{\rho}(1)}{1+\sqrt{1-4\widehat{\rho}^2(1)}}\cdot\frac{2\widehat{\rho}(1)}{1-\sqrt{1-4\rho^2(1)}}=1,$$

故
$$\left|\frac{2\widehat{\rho}(1)}{1+\sqrt{1-4\widehat{\rho}^2(1)}}\right|<1.$$

所以
$$\widehat{\theta}=2\widehat{\rho}(1)/(1+\sqrt{1-4\widehat{\rho}^2(1)}),$$

$$\widehat{\sigma}^2=\widehat{\gamma}(0)/(1+\sqrt{1-4\widehat{\rho}^2(1)}).$$

例 2 由一平稳时间序列的实测数据确定拟合模型为ARMA(1,1)型,求得$\widehat{\gamma}(0)=1.25$,$\widehat{\gamma}(1)=0.5$,$\widehat{\gamma}(2)=0.4$.估计模型的参数.

解 已知$p=1$,$q=1$,$\widehat{\rho}(1)=0.4$,$\widehat{\rho}(2)=0.32$.

将数据代入计算,得

$$\widehat{\varphi}_1=\widehat{\rho}(2)/\widehat{\rho}(1)=0.8.$$

令$X'_t=X_t-0.8X_{t-1}$,利用

$$\gamma_{X'_t}(k)=\widehat{\gamma}(k)+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\widehat{\varphi}_i\widehat{\varphi}_j\widehat{\gamma}(k-i+j)$$
$$-\sum_{i=1}^{p}\widehat{\varphi}_i\widehat{\gamma}(k-i)-\sum_{j=1}^{p}\widehat{\varphi}_j\widehat{\gamma}(k+j),$$

算得
$$\gamma_{X'_t}(0)=\widehat{\gamma}(0)+\widehat{\varphi}_1^2\widehat{\gamma}(0)-\widehat{\varphi}_1\widehat{\gamma}(1)-\widehat{\varphi}_1\widehat{\gamma}(1)$$
$$=\widehat{\gamma}(0)(1+\widehat{\varphi}_1^2)-2\widehat{\varphi}_1\widehat{\gamma}(1)$$
$$=1.25\times(1+0.8)^2-2\times0.8\times0.5=1.25,$$

$$\gamma_{X'_t}(1)=\widehat{\gamma}(1)+\widehat{\varphi}_1^2\gamma(1)-\widehat{\varphi}_1\widehat{\gamma}(0)-\widehat{\varphi}_1\widehat{\gamma}(2)$$
$$=\widehat{\gamma}(1)(1+\widehat{\varphi}_1^2)-\widehat{\varphi}_1(\widehat{\gamma}(0)+\widehat{\gamma}(2))$$
$$=0.5\times(1+0.8^2)-0.8\times(1.25+0.4)=-0.5.$$

再利用上例结论，对 X'_t 的 MA(1)模型计算 $\hat{\theta}_1$. 由

$$\hat{\rho}_{X'_t}(1)=\hat{\gamma}_{X'_t}(1)/\hat{\gamma}_{X'_t}(0)=-0.4,$$

得 $$\hat{\theta}_1=\frac{2\hat{\rho}_{X'_t}(1)}{1+\sqrt{1-4\hat{\rho}^2_{X'_t}(1)}}=\frac{2\times(-0.4)}{1+\sqrt{1-4\times 0.16}}=-0.5,$$

$$\hat{\sigma}^2=\hat{\gamma}_{X'_t}(0)[1+\sqrt{1-4\hat{\rho}^2_{X'_t}(1)}/2]$$

$$=1.25\left[\frac{1+\sqrt{1-4\times 0.16}}{2}\right]=1.$$

故 ARMA(1,1)模型为

$$X_t-0.8X_{t-1}=Z_t-0.5Z_{t-1},\ \{Z_t\}\sim WN(0,1).$$

例 3 某人心跳时间间隔 X_t 初步识别为 ARMA(1,1)模型，已知 $p=1,q=1,\hat{\rho}(1)=0.567,\hat{\rho}(2)=0.474,\overline{Y}=76.9$. 估计模型的参数.

解 $$\hat{\varphi}_1=\hat{\rho}(2)/\hat{\rho}(1)=\frac{0.474}{0.567}=0.84.$$

令 $X'_t=X_t-0.84X_{t-1}$，利用 $\gamma_{X'_t}(k)$ 公式计算，得

$$\gamma_{X'_t}(0)=\hat{\gamma}(0)+\hat{\varphi}_1^2\hat{\gamma}(0)-\hat{\varphi}_1\hat{\gamma}(1)-\hat{\varphi}_1\hat{\gamma}(1)$$

$$=\hat{\gamma}(0)[(1+\hat{\varphi}_1^2)-2\hat{\varphi}_1\rho_1]=0.753\hat{\gamma}(0),$$

$$\hat{\gamma}_{X'_t}(1)=\hat{\gamma}(1)+\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_1\hat{\gamma}(1)-\hat{\varphi}_1\hat{\gamma}(1)-\hat{\varphi}_1\hat{\gamma}(2)$$

$$=(1+\hat{\varphi}_1^2)\hat{\gamma}_1-\hat{\varphi}_1[\hat{\gamma}(0)+\hat{\gamma}(2)]=-0.271\hat{\gamma}(0).$$

利用例 1 结论，对 X'_t 的模型 MA(1)计算 $\hat{\theta}_1$，由

$$\hat{\rho}_{X'_t}(1)=\hat{\gamma}_{X'_t}(1)/\hat{\gamma}_{X'_t}(0)=-0.36,$$

得

$$\hat{\theta}_1=\frac{-2\times(-0.36)}{1+\sqrt{1-4\times(0.36)^2}}=0.42,$$

$$\hat{\sigma}^2_Z=\hat{\gamma}_{X'_t}(0)\left[\frac{1+\sqrt{1-4\times(0.36)^2}}{2}\right].$$

故 X_t 的线性模型是

$$X_t-0.84X_{t-1}=Z_t-0.42Z_{t-1}.$$

若代入 $X_t=Y_t-76.9$ 可得 Y_t 的线性模型

$$Y_t - 0.84Y_{t-1} = 12.3 + Z_t - 0.42Z_{t-1}.$$

例 4 某河流年最大径流量 Z_t 作出的 X_t 识别为 AR(2)模型. 已知 $\widehat{\rho}(1)=-0.23$，$\widehat{\rho}(2)=0.29$，$\overline{Y}=8669$. 估计参数 $\widehat{\varphi}_1$，$\widehat{\varphi}_2$.

解 依据 AR(2)参数估计公式，得

$$\widehat{\varphi}_1 = \frac{\widehat{\rho}(1)[1-\widehat{\rho}(2)]}{1-\widehat{\rho}^2(1)} = \frac{-0.23\times(1-0.29)}{1-(-0.23)^2} = -0.172,$$

$$\widehat{\varphi}_2 = \frac{\widehat{\rho}(2)-\widehat{\rho}^2(1)}{1-\widehat{\rho}^2(1)} = \frac{0.29-(0.23)^2}{1-(-0.23)^2} = 0.253.$$

所以，关于 X_t 的线性模型为

$$X_t + 0.172X_{t-1} - 0.253X_{t-2} = Z_t.$$

将 $X_t = Y_t - 8669$ 代入，得关于 Y_t 的线性模型为

$$Y_t = 7966 - 0.172Y_{t-1} + 0.253Y_{t-2} + Z_t.$$

例 5 求 AR(1)模型和 AR(2)模型参数估计式.

解 由

$$\begin{bmatrix} \widehat{\varphi}_1 \\ \widehat{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\varphi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \widehat{\rho}(1) & \widehat{\rho}(2) & \cdots & \widehat{\rho}(p-1) \\ \widehat{\rho}(1) & 1 & \widehat{\rho}(1) & \cdots & \widehat{\rho}(p-2) \\ \widehat{\rho}(2) & \widehat{\rho}(1) & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \widehat{\rho}(1) \\ \widehat{\rho}(p-1) & \widehat{\rho}(p-2) & \cdots & \widehat{\rho}(1) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{\rho}(1) \\ \widehat{\rho}(2) \\ \vdots \\ \widehat{\rho}(p) \end{bmatrix}$$

和

$$\widehat{\sigma}_Z^2 = \widehat{\gamma}(0) - \sum_{i=1}^{p} \widehat{\varphi}_i \widehat{\gamma}(i),$$

得 AR(1)模型参数

$$\widehat{\varphi}_1 = \widehat{\rho}(1), \quad \widehat{\sigma}_Z^2 = \widehat{\gamma}(0)[1-\widehat{\rho}^2(1)].$$

AR(2)模型参数

$$\widehat{\varphi}_1 = \frac{\widehat{\rho}(1)[1-\widehat{\rho}(2)]}{1-\widehat{\rho}^2(1)}, \quad \widehat{\varphi}_2 = \frac{\widehat{\rho}(2)-\widehat{\rho}(1)}{1-\widehat{\rho}^2(1)},$$

$$\widehat{\sigma}_Z^2 = \widehat{\gamma}(0)[1-\widehat{\varphi}_1\widehat{\rho}(1)-\widehat{\varphi}_2\widehat{\rho}(2)].$$

第四节 平稳时间序列预报

主要内容

一、最小方差线性预报

设$\{X_t\}$是均值为零的平稳序列，且是正态的. 令 $\hat{X}_t(l)$表示时间 t 及之前的全部观测数据，寻找如下形式的线性函数：

$$\hat{X}_t(l)=c_0X_t+c_1X_{t-1}+c_2X_{t-2}+\cdots,$$

使得$\{X_t,\ X_{t-1},\cdots\}$对未来 $t+l$ 时刻的 $X_{t+l}(l>0)$的取值所作的预报的误差均方值 $E[X_{t+l}-\hat{X}_t(l)]^2$ 为最小值，则称此 $\hat{X}_t(l)$为 X_{t+l}的线性最小方差预报.

1. 对于均值为零的正态平稳序列，其平稳线性最小方差预报 $\hat{X}_t(l)$就是 X_{k+l}在给定$\{X_k,X_{k-1},\cdots\}$时的条件均值，有表示式

$$\begin{aligned}\hat{X}_k(l)&=E[X_{k+l}\mid X_{k-j}=x_{k-j},\ j=0,1,\cdots]\\&=E[X_{k+l}\mid \mathscr{X}_k]=E[X_{k+l}\mid \mathscr{A}_k],\end{aligned}$$

其中 $\mathscr{X}_k=\{X\mid X=\sum\limits_{j=0}^{\infty}c_jX_{k-j},c_j$ 是实数，且$\sum\limits_{j=0}^{\infty}c_j^2<\infty\}$,

$$\mathscr{A}_k=\{Z\mid Z=\sum_{j=0}^{\infty}d_jZ_{k-j},\ d_j \text{ 是实数，且}\sum_{j=0}^{\infty}d_j^2<\infty\}.$$

2. 最小方差预报具有下列性质：

(1) $E[\sum\limits_{j=0}^{\infty}c_jX_{k-j}\mid \mathscr{X}_k]=\sum\limits_{j=0}^{\infty}c_jE[X_{k-j}\mid \mathscr{X}_k]$;

(2) $E[X_{k+l}\mid \mathscr{X}_k]=E[X_{k+l}\mid \mathscr{A}_k]=\begin{cases}\hat{X}_k(l), & l>0,\\ \hat{X}_{k+l}, & l\leqslant 0;\end{cases}$

(3) $E[Z_{k+l}\mid \mathscr{A}_k]=E[Z_{k+l}\mid \mathscr{X}_k]=\begin{cases}0, & l>0,\\ Z_{k+l}, & l\leqslant 0.\end{cases}$

3. 若均值为零的 ARMA(p,q)序列$\{X_t\}$具有传递形式 $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j Z_{t-j}$，其中 G_j 为格林函数，则

$$\widehat{X}_k(l) = \sum_{j=0}^{\infty} G_{j+l} Z_{k-j},\ D[X_{t+l} - \widehat{X}_t(l)] = \widehat{\sigma}_Z^2 \sum_{j=0}^{l-1} G_j^2.$$

在正态性假定下，X_{k+l}对于给定$\{X_k,\ X_{k-1},\cdots\}$的条件分布是 $N(\widehat{X}_k(l),\ D[l_k(l)])$. 而 X_{k+l}的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$(\widehat{X}_k(l) - Z_{\alpha/2}(1+G_1^2+\cdots+G_{l-1}^2)^{1/2}\widehat{\sigma}_Z^2,$$

$$\widehat{X}_k(l) + Z_{\alpha/2}(1+G_1^2+\cdots+G_{l-1}^2)^{1/2}\widehat{\sigma}_Z^2),$$

$$X_k(l) = X_{t+l} - \widehat{X}_t(l).$$

4. 若$\{X_t\}$是零均值 ARMA(p,q)序列，则有**预报差分方程**

$$\widehat{X}_k(l) = \varphi_1 \widehat{X}_k(l-1) + \cdots + \varphi_p \widehat{X}_k(l-p),\ l>p,$$

特别地，当$\{X_t\}$是 MA(q)序列时，有

$$\widehat{X}_k(l) = 0,\ l>q.$$

即对于 MA(q)序列，超过 q 步的预报值为零.

5. 若$\{X_t\}$是均值为零 ARMA(p,q)序列，则有**预报递推公式**

$$\widehat{X}_{k+1}(l) = \widehat{X}_k(l+1) + G_l[X_{k+1} - \widehat{X}_k(1)].$$

6. 德宾-莱维塞算法.

设$\{X_t,\ t=0,\pm1,\cdots\}$是均值为零、协方差函数为 $\gamma(0)$的平稳序列. 若 $\gamma(0)>0$ 且当 $h\to\infty$时，$\gamma(h)\to 0$，则对由

$$X_{n+1} = \varphi_{n1} X_n + \cdots + \varphi_{nn} X_1,\quad n\geqslant 1$$

和

$$v_n = E[(X_{n+1} - \widehat{X}_{n+1})^2],\quad n\geqslant 1,\ v_0 = \gamma(0)$$

定义的 φ_{nj} 和 v_n，$n\geqslant 1$，$j=1,2,\cdots,n$，有下列递推公式：

$$\varphi_{11} = \gamma(1)/\gamma(0),\quad v_0 = \gamma(0),$$

$$\varphi_{nn} = [\gamma(n) - \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_{n-1\,j}\quad \gamma(n-j)]v_{n-1}^{-1}.$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n\,1} \\ \vdots \\ \varphi_{n\,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{n-1\,1} \\ \vdots \\ \varphi_{n-1\,n-1} \end{bmatrix} - \varphi_{nn} \begin{bmatrix} \varphi_{n-1\,n-1} \\ \vdots \\ \varphi_{n-1\,1} \end{bmatrix},$$

$$v_n=v_{n-1}(1-\varphi_{nn}^2).$$

7. 新息递推预报.

设$\{X_t,\ t=0,\pm1,\cdots\}$是均值为零、协方差函数为$\gamma(i,j)=E[X_iX_j]$的随机序列，如果对一切$n\geqslant1$，协方差阵$[\gamma(i,j)]_{i,j=1}^n$是非奇异的，则一步预报$\hat{X}_{n+1},n\geqslant0$预报误差$V_n,n\geqslant1$可用下列递推公式：

$$\hat{X}_{n+1}=\begin{cases}0, & n=0,\\ \sum_{j=1}^{n}\theta_{nj}(X_{n+1-j}-\hat{X}_{n+1-j}), & n\geqslant1,\end{cases}$$

$$v_0=\gamma(1,1),$$

$$\theta_{n\,n-k}=v_k^{-1}[\gamma(n+1\ k+1)-\sum_{j=1}^{k-1}\theta_{k\,k-j}\theta_{n\,n-j}v_j],$$

$$k=0,1,\cdots,n-1,$$

$$v_n=\gamma(n+1,n+1)-\sum_{j=1}^{n-1}\theta_{n\,n-j}^2v_j.$$

递推顺序是：v_0；θ_{11}，v_1；θ_{22}，θ_{21}，v_2；θ_{33}，θ_{31}，$\cdots$.

二、各种模型的预报方法

1. AR(p)序列的预报.

AR(p)序列的预报递推公式为

$$\begin{cases}\hat{X}_k(l)=\varphi_1\hat{X}_k(l-1)+\cdots+\varphi_p\hat{X}_p(l-p), & l\geqslant0,\\ \hat{X}_k(l)=X_{k+l}, & l<0,\end{cases}$$

其中φ_i，$i=1,2,\cdots,p$是由样本序列确定的估计值. 由上式得

$$\begin{cases}\hat{X}_k(1)=\varphi_1X_k+\varphi_2X_{k-1}+\cdots+\varphi_pX_{k-p+1},\\ \hat{X}_k(2)=\varphi_1\hat{X}_k(1)+\varphi_2X_k+\cdots+\varphi_pX_{k-p+2},\\ \hat{X}_k(p)=\varphi_1\hat{X}_k(p-1)+\varphi_2\hat{X}_k(p-2)+\cdots+\varphi_{p-1}\hat{X}_k(1)+\varphi_pX_k,\\ \hat{X}_k(l)=\varphi_1\hat{X}_k(l-1)+\cdots+\varphi_p\hat{X}_k(l-p),l>p.\end{cases}$$

而确定 AR(p)序列X_{k+l}的$1-\alpha$置信区间所需格林函数递推公式为

$$G_1=\varphi_1,\quad G_2=\varphi_1^2+\varphi_2,\quad G_3=\varphi_1^3+2\varphi_1\varphi_2+\varphi_3,$$
$$G_4=\varphi_1^4+3\varphi_1^2\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+\varphi_2^2+\varphi_4,\cdots$$

2. MA(q)序列的预报.

其逆函数预报公式为

$$\widehat{X}_k(l)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{\infty}I_j^{(l)}X_{k+1-j}, & 1\leqslant l\leqslant q,\\ 0 & l>q.\end{cases}$$

而

$$I_j^{(l)}=\begin{cases}I_j, & l=1,\\ I_{j+l-1}+\sum\limits_{i=1}^{l-1}I_iI_j^{(l-i)}, & 1<l\leqslant q,\end{cases}$$

其中 I_j 为逆函数,有 $I(B)=1-\sum\limits_{j=1}^{\infty}I_jB^j=\theta^{-1}(B)\varphi(B)$.

预报向量递推法的预报矩阵为

$$\begin{bmatrix}\widehat{X}_{k+1}(1)\\ \widehat{X}_{k+1}(2)\\ \vdots\\ \widehat{X}_{k+1}(q-1)\\ \widehat{X}_{k+1}(q)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_1 & 1 & & & \\ \theta_2 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ \theta_{q-1} & & & \ddots & 1\\ \theta_q & & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{X}_k(1)\\ \widehat{X}_k(2)\\ \vdots\\ \widehat{X}_k(q-1)\\ \widehat{X}_k(q)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \vdots\\ \theta_{q-1}\\ \theta_q\end{bmatrix}X_{k+1},$$

递推初值可定为 $\widehat{X}_{k_0}(1)=\widehat{X}_{k_0}(2)=\cdots=\widehat{X}_{k_0}(q)=0$.

3. ARMA(p,q)序列的预报.

其逆函数预报公式为

$$\widehat{X}_k(l)=\varphi_1\widehat{X}_k(l-1)+\cdots+\varphi_pX_k(l-p)+\widehat{Z}_k(l)-\theta_1\widehat{Z}_k(l-1)$$
$$+\cdots-\theta_q\widehat{Z}_k(l-q).$$

当 $l>q$ 时,$\widehat{X}_k(l)\neq0$,预报公式同主要内容一第 4 点中的差分方程;此时 $\widehat{Z}_k(l)=\widehat{Z}_k(l-1)=\cdots=\widehat{Z}_k(l-p)=0$.

当 $1\leqslant l\leqslant q$ 时,按上式即可求出各步预报公式,式中 $\widehat{Z}_k(l)$,

$\widehat{Z}_k(l-1),\cdots,\widehat{Z}_k(l-q)$按 MA($q$)序列预报方法求.

ARMA(p,q)序列的预报向量递推公式为

$$X_{k+1}^{(q)}=\begin{bmatrix} -G_1 & 1 & & & \\ -G_2 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -G_{q-1} & & & & 1 \\ -G_q+\varphi_q^* & \varphi_{q-1}^* & \cdots & \cdots & \varphi_2^* & \varphi_1^* \end{bmatrix}\widehat{X}_k^{(q)}$$

$$+\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_{q-1} \\ G_q \end{bmatrix}X_{k+1}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum\limits_{j=q+1}^{p}\varphi_j^* X_{k+q-j+1} \end{bmatrix}.$$

式中 $$\widehat{X}_{k+1}^{(q)}=(\widehat{X}_{k+1}(1),\widehat{X}_{k+1}(2),\cdots,\widehat{X}_{k+1}(q))^{\mathrm{T}}.$$

当 $p\leqslant q$ 时, $$\sum_{j=q+1}^{p}\varphi_j^* X_{p+q-j+1}=0,$$

初值可定为 $$\widehat{X}_{k_0}(1)=\widehat{X}_{k_0}(2)=\cdots=\widehat{X}_{k_0}(q)=0.$$

而 $$\varphi_j^*=\begin{cases}\varphi_j, & 1\leqslant j\leqslant p, \\ 0, & j>p.\end{cases}$$

疑 难 解 析

什么是预报？平稳序列的预报方法有哪几种？

答 所谓预报,就是在已知一个时间序列现在与过去的数值的条件下,对未来的数值所作的估计. 如,已知时间序列

$$\cdots X_{-2},X_{-1},X_0,X_1,X_2,\cdots,X_k,\cdots X_{k+l},\cdots,\quad k,l>1,$$

若已经观测到 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 的数值,要估计 X_{k+l}的值,称为在时刻 k 作 l 步预报. 而 X_{k+l}的估计值记为$\widehat{X}_{k+l}$或$\widehat{X}_k(l)$,称为 l 步预

报值.

如同概率统计中一样，我们以方差最小的估计为最好，所以采用最小方差估计法.

平稳序列的预报方法一般有两种，一是直接预报法，另一是递推法. 不同模型的具体实施方法有所不同. 直接预报是利用逆函数直接预报的，一般来说，运算量较大. 递推法按递推预报公式进行，必须按次序递推.

方法、技巧与典型例题分析

正确地利用已知数据、公式对所给模型进行预报分为两个问题：一是求预报公式，二是计算预报值及求出置信区间. 解决问题没有特别的技巧，只有按照类型使用公式进行就可以了. 唯一要注意的是保证数据的准确性.

例 1 设有平稳过程$\{X_t=A\cos\omega t+B\sin\omega t,\ t\in T\}$，其中 A，B 是均值为零、方差为 σ^2 的不相关随机变量，$\omega\in(0,\pi)$是常量. 如果已观测到 X_1 和 X_2，求 $\widehat{X}_3$.

解 因为此平稳过程的协方差函数为 $\gamma(h)=\sigma^2\cos\omega h$，所以，$\gamma(0)=\sigma^2$，$\gamma(1)=\sigma^2\cos\omega$，$\gamma(2)=\sigma^2\cos2\omega$，则由 $\Gamma_n\boldsymbol{\varphi}_n=\boldsymbol{\gamma}_n$（其中 $\Gamma_n=[\gamma(i-j)]_{i,j=1}^n$），有

$$\Gamma_1\boldsymbol{\varphi}_1=\gamma(1),\quad \Gamma_2\boldsymbol{\varphi}_2=\boldsymbol{\gamma}_2,$$

故

$$\boldsymbol{\varphi}_1=(\boldsymbol{\sigma}^2\cos\omega)/\sigma^2=\cos\omega,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2=\Gamma_2^{-1}\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{bmatrix}\sigma^2 & \sigma^2\cos\omega\\ \sigma^2\cos\omega & \sigma^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma^2\cos\omega\\ \sigma^2\cos2\omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cos\omega\\ -1\end{bmatrix},$$

所以

$$\widehat{X}_3=(2\cos\omega)X_2-X_1.$$

例 2 用德宾-莱维塞算法对 MA(1)过程

$$X_t=Z_t-0.9Z_{t-1},\ \{Z_t\}\sim \mathrm{WN}(0,\ 1)$$

进行预报.

解 $v_0=1.810$;

$\varphi_{11}=-0.4972$, $v_1=1.362$;

$\varphi_{22}=-0.3285$, $\varphi_{21}=-0.6605$, $v_2=1.215$;

$\varphi_{33}=-0.2433$, $\varphi_{32}=-0.4892$, $\varphi_{31}=-0.7407$, $v_3=1.144$;

$\varphi_{44}=-0.1914$, $\varphi_{43}=-0.3850$, $\varphi_{42}=-0.5828$,

$\varphi_{41}=-0.7870$, $V_4=1.102$;

$\vdots$

例 3 对 ARMA(1,1)过程

$$X_t-\varphi X_{t-1}=Z_t+\theta Z_{t-1}, \{Z_t\}\sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$$

求新息递推预报式.

解 $\hat{X}_{n+1}=\varphi X_n+\theta_{n1}(X_n-\hat{X}_n)$, $n\geqslant 1$. 为计算 θ_{n1},先求 $\gamma_X(0)$及 $\gamma_X(1)$.

$$\gamma_X(0)=\frac{\sigma^2(1+2\theta\varphi+\theta^2)}{1-\varphi^2},$$

$$\gamma_W(i,j)=\begin{cases}(1+2\theta\varphi+\theta^2)/(1-\varphi^2), & i=j=1.\\ 1+\theta^2, & i=j\geqslant 2,\\ \theta, & |i-j|=1, i\geqslant 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

又由主要内容一第 7 点,有

$$\begin{cases}\gamma_0=(1+2\theta\varphi+\theta^2)/(1-\varphi^2),\\ \theta_{n1}=\theta/\gamma_{n-1},\\ \gamma_n=1+\theta^2-\theta^2/\gamma_{n-1},\end{cases}$$

然后依题给等式求得 ARMA(1,1)过程的递推预报.

注意 $W_t=\sigma^{-1}X_t$, $t=1,2,\cdots,m$; $W_t=\sigma^{-1}\varphi(B)X_t$, $t>m$.

例 4 求 AR(1)序列的预报式.

解 AR(1)模型为 $X_t-\varphi_1X_{t-1}=Z_t$.

由 AR(p)序列的预报递推公式(见主要内容二第 1 点)有

$$\hat{X}_k(l)=\varphi_1\hat{X}_k(l-1)\ (l>0),$$

代入初始值 $\widehat{X}_k(0)=X_k$，得

$$\widehat{X}_k(1)=\varphi_1 X_k,\quad \widehat{X}_k(2)=\varphi_1\widehat{X}_k(1)=\varphi_1^2 X_k,\cdots,$$

$$\widehat{X}_k(l)=\varphi_1\widehat{X}_k(l-1)=\cdots=\varphi_1^l X_k.$$

例 5 设有 AR(2)模型 $X_t=1.2X_{t-1}-0.55X_{t-2}+Z_t$，$X_k=7.61$，$X_{k-1}=6.02$，$\widehat{\sigma}_Z^2=0.08^2$. 求模型的前三步预报值及 X_{k+3} 的 0.95 置信区间.

解 由主要内容二第 1 点中公式得

$\widehat{X}_k(1)=1.2X_k-0.55X_{k-1}=5.821$，

$\widehat{X}_k(2)=1.2\widehat{X}_k(1)-0.55X_k=2.7995$，

$\widehat{X}_k(3)=1.2\widehat{X}_k(2)-0.55\widehat{X}_k(1)=0.1579.$

因为 $1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，查表得 $Z_{0.025}=1.96$，故由

$$X_k(3)\mp Z_{\alpha/2}(1+G_1^2+G_2^2)^{1/2}\widehat{\sigma}_Z$$

$$=0.158\mp 1.96(1+(1.2)^2+(0.89)^2)^{1/2}\cdot 0.08,$$

得 X_{k+3} 的 0.95 置信区间是(0.124，0.440)。

例 6 某水文站记录的年最大径流量的模型方程是

$$X_t=7\,966-0.172X_{t-1}+0.253X_{t-2}+Z_t.$$

已知 $X_{1998}=10\,000$，$X_{1999}=9\,300$，试对 2000，2001，2002 年三年的年最大径流量作出预报.

解 由预报公式 $\widehat{X}_{k+l}=7966-0.172\widehat{X}_{k+l-1}+0.253\widehat{X}_{k+l-2}$ 计算，得

$\widehat{X}_{2000}=7\,966-0.172\times 9\,300+0.253\times 10\,000=8\,896$，

$\widehat{X}_{2001}=7\,966-0.172\times 8\,896+0.253\times 9\,300=8\,789$，

$\widehat{X}_{2002}=7\,966-0.172\times 8\,789+0.253\times 8\,896=8\,705.$

例 7 写出 MA(1)序列的预报公式.

解 MA(1)过程为 $X_t=Z_t-\theta_1 Z_{t-1}$.

因为 $q=1$，故 $l>1$ 时，$\widehat{X}_k(l)=0$. 所以

$$\widehat{X}_k(1)=\theta_1\widehat{X}_{k-1}(1)-\theta X_k.$$

由于阶数较低，也可用逆函数方法求.

由公式(见主要内容二第 2 点)，有 $I_j^{(1)}=I_j(j\geqslant1)$. 又由

$$\theta^{-1}(B)=\frac{1}{1-\theta_1B}=1+\theta_1B+\theta_1^2B^2+\cdots=1-\sum_{j=1}^{\infty}I_jB^j,$$

得 $$I_j=-\theta_1^j,\ j\geqslant1.$$

代入公式得预报公式

$$\widehat{X}_k(1)=\sum_{j=1}^{\infty}(-\theta_1^j)X_{k+1-j}=\sum_{j=1}^{k}-\theta_1^jX_{k+1-j}.$$

例 8 设 MA(2)模型为 $X_t=Z_t-0.5Z_{t-1}+0.06Z_{t-2}$，求预报公式.

解法 1 直接将数据代入得模型的预报向量递推公式，得

$$\begin{bmatrix}\widehat{X}_{k+1}(1)\\ \widehat{X}_{k+1}(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_1 & 1\\ \theta_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{X}_k(1)\\ \widehat{X}_k(2)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}X_{k+1}$$

$$=\begin{bmatrix}0.5 & 1\\ -0.06 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{X}_k(1)\\ \widehat{X}_k(2)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.5\\ -0.06\end{bmatrix}X_{k+1}.$$

解法 2 用逆函数法求预报公式. 因为

$$X_t=(1-0.5B+0.06B^2)Z_t,$$

所以

$$1-\sum_{j=1}^{\infty}I_jB^j=\frac{1}{\theta(B)}=\frac{1}{1-0.5B+0.06B^2}$$

$$=\frac{3}{1-0.3B}-\frac{2}{1-0.2B}$$

$$=3\sum_{j=0}^{\infty}(0.3)^jB^j-2\sum_{j=0}^{\infty}(0.2)^jB^j$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}[3(0.3)^j-2(0.2)^j]B^j.$$

比较等式两边系数，得

$$I_j=2(0.2)^j-3(0.3)^j,\ j\geqslant1,$$

所以

$$I_j^{(1)}=I_j=2(0.2)^j-3(0.3)^j;$$

$$I_j^{(2)}=I_{j+1}+I_1I_j^{(1)}$$

$$=2(0.2)^{j+1}-3(0.3)^{j+1}$$
$$+[2(0.2)-3(0.3)][2(0.2)^{j}-3(0.3)^{j}]$$
$$=2(0.3)^{j+1}-3(0.2)^{j+1}.$$

代入 $$\widehat{X}_k(l)\approx\sum_{j=1}^{k}I_j^{(l)}X_{k+1-j},\ 1\leqslant l\leqslant q,$$

得 $$\widehat{X}_k(1)\approx\sum_{j=1}^{k}[2(0.2)^{j}-3(0.3)^{j}]X_{k+1-j},$$
$$\widehat{X}_k(2)\approx\sum_{j=1}^{k}[2(0.3)^{j+1}-3(0.2)^{j+1}]X_{k+1-j}.$$

例 9 广东某水文站根据 1950 年到 2003 年各年最大径流量的数据，确定 MA(2)模型

$$X_t=31\,563+Z_t-0.01Z_{t-1}+0.204Z_{t-2},$$

试预报 2004，2005，2006 年最大径流量.

解 将已知数据 $\mu=31\,563,\theta_1=0.01,\theta_2=-0.204$ 代入预报公式，有

$$\widehat{X}_{k+l}=31\,563-0.01\widehat{Z}_{k+l-1}+0.204\widehat{Z}_{k+l-2}.$$

根据已知 1984 年的数据可以算得 $\widehat{Z}_{2002}=-18\,180,\widehat{Z}_{2003}=-3\,277$. 代入上式，得

$$\widehat{X}_{2004}=31\,563-0.01(-3\,277)+0.204(-18\,180)=27\,887,$$
$$\widehat{X}_{2005}=31\,563+0.204(-3\,277)=30\,895\ (\widehat{Z}_{2004}=0),$$
$$\widehat{X}_{2006}=31\,563\ (\widehat{Z}_{2004}=0,\widehat{Z}_{2005}=0).$$

例 10 设有 ARMA(1,1)模型

$$X_t+0.3X_{t-1}=26.7+Z_t-0.2Z_{t-1},$$

且已测得 X_1 到 X_{100}，求预报值 $X_{100}(l)$，$l=1,2,3$.

解 由已知数据与公式(见主要内容二第 3 点)，算得 $\widehat{Z}_{100}=1.3$(因为 $q=1$，只要算一个白色噪声估计值). 又 $X_{100}=25.1$.

由模型方程得 $X_{k+l}=26.7-0.3X_{k+l-1}+Z_{k+l}-0.2Z_{k+l-1}$，两边取估计值，得

$$\widehat{X}_{k+l}=26.7-0.3\widehat{X}_{k+l-1}-0.2\widehat{Z}_{k+l-1},$$

故 $$\hat{X}_{100}(1)=\hat{X}_{101}=26.7-0.3X_{100}-0.2\hat{Z}_{100}$$
$$=26.7-0.3\times25.1-0.2\times1.3=18.9,$$
$$\hat{X}_{100}(2)=\hat{X}_{102}=26.7-0.3\hat{X}_{101}-0.2\hat{Z}_{101}$$
$$=26.7-0.3\times18.9=21.0\ (\hat{Z}_{101}=0),$$
$$\hat{X}_{100}(3)=\hat{X}_{103}=26.7-0.3\hat{X}_{102}-0.2\hat{Z}_{102}$$
$$=26.7-0.3\times21=20.4\ (\hat{Z}_{102}=0).$$

例 11 设有 ARMA(1,2)模型
$$X_t-0.4X_{t-1}=Z_t-0.5Z_{t-1}+0.06Z_{t-2},$$
求预报公式.

解法 1 用递推预报公式求. 因为
$$\varphi(B)=1-0.4B,\quad \theta(B)=1-0.5B+0.06B^2,$$
故 $$G(B)=\varphi^{-1}(B)\theta(B)=\frac{1-0.5B+0.06B^2}{1-0.4B},$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}(1-0.5B+0.06B^2)(0.4B)^i=\sum_{i=0}^{\infty}G_iB^i.$$
比较系数,得 $G_1=-0.1, G_2=0.56$. 又 $\varphi_q^*=\varphi_2^*=0$, $\varphi_{q-1}^*=\varphi_1$, 对 $1\leqslant l\leqslant2$,有
$$\begin{bmatrix}\hat{X}_{k+1}(1)\\ \hat{X}_{k+1}(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-G_1 & 1\\ -G_2 & \varphi_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{X}_k(1)\\ \hat{X}_k(2)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}G_1\\ G_2\end{bmatrix}X_{k+1}$$
$$=\begin{bmatrix}0.1 & 1\\ -0.56 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{X}_k(1)\\ \hat{X}_k(2)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.1\\ 0.56\end{bmatrix}X_{k+1}.$$
当 $l>2$ 时, $\hat{X}_k(l)=\varphi_1\hat{X}_k(l-1)=0.4^{l-2}\hat{X}_k(2)$.

解法 2 用逆函数直接预报.

当 $l>q=2$ 时,预报公式与解法 1 相同.

当 $1\leqslant l\leqslant2$ 时,有
$$I(B)=\theta^{-1}(B)\varphi(B)=1-\sum_{j=1}^{\infty}I_jB^j=\frac{1-0.4B}{1-0.5B+0.06B}$$

$$= (1-0.4B)\sum_{j=0}^{\infty}[3(0.3)^j - 2(0.2)^j]B^j$$

$$= 1+\sum_{j=1}^{\infty}[2(0.2)^j - (0.3)^j]B^j.$$

比较系数，得 $I_j=(0.3)^j-2(0.2)^j$，于是

$$I_j^{(1)}=I_j=(0.3)^j-2(0.2)^j,$$

$$\begin{aligned} I_j^{(2)} &= I_{j+1}+I_1 I_j^{(1)} \\ &= (0.3)^{j+1}-2(0.2)^{j+2} \\ &\quad +[0.3-2(0.2)][(0.3)^j-2(0.2)^j] \\ &= (0.2)[(0.3)^j-(0.2)^j], \end{aligned}$$

所以，预报公式为

$$\hat{X}_k(1) = \sum_{j=1}^{\infty}[(0.3)^j - 2(0.2)]X_{k+1-j},$$

$$\hat{X}_k(2) = \sum_{j=1}^{\infty}(0.2)[(0.3)^j - 2(0.2)^j]X_{k+1-j}.$$

第五节　非平稳时间序列及其预报

主 要 内 容

一、ARIMA 过程

1. ARIMA(p,d,q)过程

设 d 是非负整数，如果$\{Y_t=(1-B)^d X_t\}$是 ARMA(p,q)过程，则称$\{X_t\}$为 ARIMA(p,d,q)过程，d 称为**求和阶数**.

这时，$\{X_t\}$满足差分方程

$\varphi^*(B)X_t=\varphi(B)(1-B)^d X_t=\theta(B)Z_t$，$\{Z_t\}\sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$，

其中 $\varphi^*(B)=\varphi(B)(1-B)^d$，$\varphi(Z)$和 $\theta(Z)$分别为 p 阶自回归多项

式和 q 阶滑动平均多项式. 多项式 $\varphi^*(Z)$在 $Z=1$ 有 d 重零点. 过程$\{X_t\}$是平稳的充要条件是 $d=0$,此时即为 ARMA(p,q)过程.

通常记 $\nabla=1-B$,并称之为**差分算子**. 差分方程记为 $\varphi(B)\nabla^d X_t=\theta(B)Z_t$. 下面给出用初值 X_1, X_2, X_d 和平稳 ARMA(p,q)序列$\{Y_t\}$表示 ARIMA(p,d,q)序列的常用表达式($X_t=at+b+Y_t$,$\{Y_t\}$是平稳序列).

当 $d=1$ 时,有

$$X_t=X_1+\sum_{j=1}^{t-1}(X_{j+1}-X_j)=X_1+\sum_{j=1}^{t-1}\nabla X_{j+1}$$
$$=X_1+\sum_{j=1}^{t-1}Y_{j+1}=X_k+\sum_{j=1}^{t-k}Y_{j+k};$$

当 $d=2$ 时,有

$$X_t=X_1+\sum_{j=1}^{t-1}\nabla X_{j+1},\quad \nabla X_{j+1}=\nabla X_2+\sum_{i=1}^{j-1}\nabla^2 X_{i+2}.$$

得
$$X_t=X_1+\sum_{j=1}^{t-1}\left(\nabla X_2+\sum_{i=1}^{j-1}\nabla^2 X_{i+2}\right)$$
$$=X_1+(t-2)\nabla X_2+\sum_{i=1}^{t-2}(t-1-i)Y_{i+2}.$$

一般形式为

$$X_t=\sum_{i=0}^{d-1}C_{t-d+i-1}^{i}\nabla^i X_d+\sum_{j=1}^{t-d}C_{t-j+1}^{d-1}Y_{d+j}$$
$$=\sum_{i=0}^{d-1}C_{t-k+i-1}^{i}\nabla^i X_k+\sum_{j=1}^{t-k}C_{t-k-j+d-1}^{d-1}Y_{k+j},\ t>k\geqslant d.$$

2. ARIMA(p,d,q)序列的预报方法

$$X_{k+l}=\sum_{i=0}^{d-1}C_{l+i-1}^{i}\nabla^i X_k+\sum_{j=1}^{l}C_{l-j+d-1}^{d-1}\hat{Y}_k(j).$$

当 $d=1$ 时,有 $\quad \hat{X}_k(l)=X_k+\sum_{j=1}^{l}\hat{Y}_k(j);$

当 $d=2$ 时,有

$$\widehat{X}_k(l) = X_k + l(X_k - X_{k-1}) + \sum_{j=1}^{l}(l+1-j)\widehat{Y}_k(j).$$

二、SRIMA 过程(季节性模型)

设 $$X_t = m_t + s_t + Y_t,$$

其中 m_t 是趋势项,s_t 是季节项,Y_t 是随机噪声.

由于周期为 s,用差分算子 $\nabla_s = (1-B^s)$ 作季节差分,消除季节性影响. 再作 d 阶差分消除趋势影响,从而得到平稳序列. 故一般季节性模型为

$$\varphi(B)\nabla^d\nabla_s X_t = \theta(B)Z_t.$$

又设 d 和 D 是非负整数,如果差分过后过程

$$Y_t = (1-B)^d(1-B^S)^D$$

是 ARMA 过程

$$\varphi(B)\Phi(B^s)Y_t = \theta(B)\Theta(B^S)Z_t,\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2),$$

则称$\{X_t\}$是周期为 s 的季节 ARIMA$(p,d,q)X(P,D,Q)_s$ 过程. 其中

$$\varphi(Z) = 1-\varphi_1 Z - \cdots - \varphi_p Z^p,\quad \Phi(Z) = 1-\Phi_1 Z - \cdots - \Phi_p Z^p,$$

$$\theta(Z) = 1+\theta_1 Z + \cdots + \theta_q Z^q,\quad \Theta(Z) = 1+\Theta_1 Z + \cdots + \Theta_q Z^q.$$

在实际应用中,D 很少大于 1,P,Q 一般小于 3.

疑难解析

非平稳时间序列及其预报有什么意义?

答 实际问题中遇到的时间序列有许多不是平稳时间,有些具有趋势性变化,有些具有季节性周期变化,对于这些时间序列,我们要作季节性差分 ∇_s 消除季节性影响,作趋势性差分 ∇^d 消除趋势性影响,从而化为平稳时间序列来预报. 但非平稳时间序列及其预报的过程与运算比较复杂,请读者阅读有关专著,以求了解.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 如果当 $\varphi\in(-1,1)$时有

$$(1-\varphi B)(1-B)X_t=Z_t,\ \{Z_t\}\sim\mathrm{WN}(0,\sigma^2),$$

写出 X_t 的表达式.

解 由题设知$\{X_t\}$是 ARIMA(1,1,0)过程

$$X_t = X_0 + \sum_{j=1}^{t} Y_j,\ t \geqslant 1,$$

其中

$$Y_t = (1-B)X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j Z_{t-j}.$$

例 2 设有非平稳模型

$$(1-B)X_t=(1-\theta_1 B)Z_t,$$

写出其预报式.

解 $\{X_t\}$是 $p=0,d=1,q=1$ 的非平稳序列. 令

$$Y_t=(1-B)X_t=X_t-X_{t-1}=\nabla X_t,$$

则$\{Y_t\}$是 MA(1)序列. 已知 MA(1)的预报公式是

$$\hat{Y}_k(1) = \sum_{j=1}^{\infty} -\theta_1^j Y_{k+1-j}.$$

由于 $d=1$,代入公式得

$$\begin{aligned}\widehat{X}_k(1) &= X_k - \sum_{j=1}^{\infty}\theta_1^j Y_{k+1-j} = X_k - \sum_{j=1}^{\infty}\theta_1^j \nabla X_{k+1-j} \\ &\approx X_k - \sum_{j=1}^{k}\theta_1^j (X_{k+1-j} - X_{k-j}).\end{aligned}$$

附录　补充知识

我们在这里补充一些一般概率论与数理统计教材中没有提到而在随机过程课程中可能用到的概率论知识，同时介绍关于常系数线性差分方程求解的知识.

一、有关概率论的补充知识

1. σ - 代数与概率空间

σ - 代数定义　设 $\mathscr{F}$ 为某一空间 Ω 的子集所构成的集类，满足

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$,

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$, 则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$,

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F}$, $n = 1,2,\cdots$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$,

那么，集类 $\mathscr{F}$ 称为 σ - 域或波雷尔(Borel) 域，也称为 σ - 代数.

σ - 代数具有以下性质：

(1) 空集 $\varnothing \in \mathscr{F}$;

(2) 若 $A_n \in \mathscr{F}$, $n = 1,2,\cdots$, 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$;

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F}$, $n = 1,2,\cdots$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n \in \mathscr{F}$, $\bigcap\limits_{n=1}^{k} A_n \in \mathscr{F}$;

(4) 若 $A_n \in \mathscr{F}$, $n = 1,2,\cdots$, 则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \in \mathscr{F}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \in \mathscr{F}$.

记 $\mathbf{R}^1$ 为一维欧几里德空间，则一切形如 $[a,b)$ 的有界半开区间构成的集类所产生的 σ - 代数称为一维波雷尔 σ - 代数，记为 $\mathscr{B}_1$. $\mathscr{B}_1$ 中包括一切开区间、闭区间、单个实数、可列个实数以及由它们经过可列次并、可列次交运算所得到的集.

记 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧几里德空间，则一切 n 维矩形构成的集类所产生的 σ - 代数称为 n 维波雷尔 σ - 代数，记为 $\mathscr{B}_n$.

设 Ω 为样本空间，$\mathscr{F}$ 是由样本空间 Ω 的一些子集构成的一个 σ - 代数，则称 $\mathscr{F}$ 是事件域，$\mathscr{F}$ 中的元素称为事件，Ω 称为必然事件，$\varnothing$ 称为不可能事件.

概率的公理化定义　设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是可测空间，$P(\cdot)$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值函数，如果

(1) 对任意 $A \in \mathscr{F}$，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$,

(2) $P(\Omega) = 1$,

(3) 若 $A_m \in \mathscr{F}$, $m = 1,2,\cdots$, 且 $A_iA_j = \varnothing$, $i \neq j$,

则有
$$P(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m).$$
则称 P 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率, $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 称为概率空间, $P(A)$ 为事件 A 的概率.

2. 波雷尔函数

设 $y = g(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 到 $\mathbf{R}^1$ 上的一个映射, 如果对任意实数 a, 均有 $\{x: g(x) \leqslant a\} \in \mathscr{B}_1$, 则称 $g(x)$ 是**一元波雷尔函数**.

设 $y = g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个映射, 如果对任意实数 a, 均有 $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n): g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant a\} \in \mathscr{B}_n$, 则称 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 **n 元波雷尔函数**.

一切连续函数都是波雷尔函数.

若 ξ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量, 而 $g(x)$ 是一元波雷尔函数, 则 $g(\xi)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量. 若 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量, 则 $g(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量.

3. 随机向量的数字特征

设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的两个函数, 则积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$ (如果存在的话) 称为 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**斯蒂尔吉斯积分**, 简称 **S 积分**:

设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的两个函数, 若积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$ 存在, 且极限 $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$ 存在, 则称此极限为 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的斯蒂尔吉斯积分, 记为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}g(x)$.

存在定理 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续有界, $g(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上单调有界, 则 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}g(x)$ 一定存在.

设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数, 若 $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \mathrm{d}F(x) < \infty$, 则称 $\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F(x)$ 为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F(x)$.

若 X 是连续型随机变量, 则 $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.

设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数, 对于随机变量 $Y = g(X)$, 若

$$\int_{-\infty}^{\infty} | g(x) | \mathrm{d}F(x) < \infty,$$

则 $g(X)$ 的数学期望存在，$E[Y] = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}F(x)$.

随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的数学期望定义为向量$(E[X_1], E[X_2], \cdots, E[X_n])$，其中

$$E[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_i \mathrm{d}F(x_1, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i \mathrm{d}F_{X_i}(x_i),$$

其中 $F_{X_i}(x_i)$ 是 X_i 的边缘分布函数.

若 $\boldsymbol{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^{\mathrm{T}}$ 的密度函数是 $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X})$，则

$$E[\boldsymbol{X}] = [E[X_1], E[X_2], \cdots, E[X_n]]^{\mathrm{T}} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{X} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X},$$

其中 $\boldsymbol{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^{\mathrm{T}}$，或写为

$$E[\boldsymbol{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}] f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n;$$

$$\begin{aligned} D[\boldsymbol{X}] &= E\{(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])^{\mathrm{T}}\} \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (X_i - E[X_i])(x_j - E[X_j]) \right. \\ &\qquad \left. \cdot f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \right]_{n \times n}, \end{aligned}$$

或写为 $$D[\boldsymbol{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])^{\mathrm{T}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}.$$

$D[\boldsymbol{X}]$ 是一个非负定阵.

设 n 维随机向量 $\boldsymbol{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^{\mathrm{T}}$ 的二阶中心矩存在，即

$$C_{ik} = \mathrm{Cov}(X_i, X_k) = (E[(X_i - E[X_i])(X_k - E[X_k]),$$

则称方阵 $$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

为 n 维随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的协方差阵. 协方差阵是一个对称矩阵.

若有随机向量 $\boldsymbol{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{Y} = [Y_1, Y_2, \cdots, Y_n]^{\mathrm{T}}$，其联合密度函数为 $f_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$，则协方差矩阵

$$\mathrm{Cov}[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] = E[(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])(\boldsymbol{Y} - E[\boldsymbol{Y}]^{\mathrm{T}})]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])(\boldsymbol{Y} - E[\boldsymbol{Y}])^{\mathrm{T}} f_{XY}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \mathrm{d}\boldsymbol{X}\mathrm{d}\boldsymbol{Y}$$

是 $n \times m$ 矩阵，且 $\mathrm{Cov}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] = (\mathrm{Cov}[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}])^{\mathrm{T}}$.

两个随机向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的相关阵为

$$E[\boldsymbol{XY}^{\mathrm{T}}] = E[(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}] + E[\boldsymbol{X}])\ (\boldsymbol{Y} - E[\boldsymbol{Y}] + E[\boldsymbol{Y}])^{\mathrm{T}}]$$
$$= \mathrm{Cov}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] + E[\boldsymbol{X}](E[\boldsymbol{Y}])^{\mathrm{T}}.$$

若 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵为零，则 $E[\boldsymbol{XY}^{\mathrm{T}}] = E[\boldsymbol{X}](E[\boldsymbol{Y}])^{\mathrm{T}}$，称随机向量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 不相关.

对于两个随机向量 $\boldsymbol{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_m]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{Y} = [Y_1, Y_2, \cdots, Y_m]^{\mathrm{T}}$，在给定条件 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}$ 下，$\boldsymbol{X}$ 的条件期望为

$$E[\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{y}] = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{X} f(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{X},$$

条件方差为

$$D[\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{y}] = E[(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{y}])(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{y}])^{\mathrm{T}}]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{y}])(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{y}])^{\mathrm{T}} f(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{X}.$$

4. 特征函数

定义 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则

$$\varphi(v) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}vx}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}vx} \mathrm{d}F(x)$$

称为随机变量 X 的**特征函数**，其中，v 为实参变量，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}vx}$ 为复随机变量. 特征函数是一实变量 v 的复值函数，对一切实数 v，都有 $|\varphi(v)| \leqslant 1$. 特征函数只与分布函数有关.

若 X 是离散型随机变量，概率函数为 p_k，则

$$\varphi(v) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}vx}] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}vx_k} p_k.$$

X 是连续型随机变量，密度函数为 $f(x)$，则

$$\varphi(v) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}vx}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}vx} f(x) \mathrm{d}x.$$

随机变量 X 的特征函数是其概率密度函数的傅里叶逆变换，故

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}vx} \mathrm{d}x.$$

特征函数 $\varphi(v)$ 有以下性质：

(1) $|\varphi(v)| \leqslant \varphi(0) = 1$.

(2) 若随机变量 $Y = aX + b$，其中 a,b 为常数，则 $\varphi_Y(v) = e^{jvb}\varphi_X(av)$，其中，$\varphi_Y(v)$ 是 Y 的特征函数，$\varphi_X(v)$ 是 X 的特征函数.

(3) 特征函数在 $\mathbf{R}^1$ 域上一致连续.

(4) 两个相互独立的随机变量 X,Y 之和的特征函数等于它们特征函数之积，即若 $Z = X+Y$，则

$$\varphi_Z(v) = \varphi_X(v)\varphi_Y(v).$$

(5) 若随机变量 X 有 n 阶绝对矩，则 X 的特征函数可微分 n 次，并在 $k \leqslant n$ 时，有

$$E[X^k] = j^{(-k)}\varphi^{(k)}(0).$$

(6) 对于任意的正整数 n，任意实数 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 以及任意实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，有下式成立：

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(v_k - v_i)\lambda_k\overline{\lambda_i} \geqslant 0.$$

此性质称为特征函数的**非负定性**.

下面是几种常见分布的特征函数：

单点分布(退化分布)　$\varphi(v) = e^{jvc}$（c 为常数）；

0-1 分布　$\varphi(v) = q + pe^{jv}$；

二项分布　$B(n,p)$　$\varphi(v) = (pe^{jv} + q)^n$；

泊松分布　$\varphi(v) = e^{\lambda(e^{jv}-1)}$；

标准正态分布　$\varphi(v) = e^{-v^2/2}$.

波赫纳尔-辛钦定理　函数 $\varphi(t)$ 是特征函数的充要条件是：$\varphi(t)$ 非负定、连续且 $\varphi(0) = 1$.

5. n 元特征函数

n 维随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$，分布函数为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，对任意 n 个实数 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，定义

$$\begin{aligned}\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_n) &= E[e^{j(v_1X_1+v_2X_2+\cdots+v_nX_n)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(v_1x_1+v_2x_2+\cdots+v_nx_n)}\,dF(x_1, x_2, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

为 $\boldsymbol{X}$ 的 **n 元特征函数**. 其矩阵形式为

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = E[\exp(j\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})] = \int_{\mathbf{R}^n}\exp(j\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})f(\boldsymbol{X})\,d\boldsymbol{X},$$

其中 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$. 而

$$f(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^n} \exp(-\mathrm{j}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\varphi(\boldsymbol{\nu})\mathrm{d}\boldsymbol{\nu}.$$

n 元特征函数有以下性质：

(1) $\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_n) \leqslant \varphi(0, \cdots, 0) = 1$,

$\varphi(-v_1, -v_2, \cdots, -v_n) = \overline{\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_n)}$.

(2) $\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中一致连续.

(3) 若 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$ 的特征函数是 $\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_n)$，则随机变量 $\boldsymbol{Y} = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$ 的特征函数为

$$\varphi_{\boldsymbol{Y}}(v) = \varphi(a_1 v, a_2 v, \cdots, a_n v)$$

(4) 若 $\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$ 的特征函数，则 k $(0 < k < n)$ 维随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_k)^{\mathrm{T}}$ 的特征函数为

$$\varphi_{X_1, X_2, \cdots, X_k}(v_1, v_2, \cdots, v_k) = \varphi(v_1, v_2, \cdots, v_k, 0, \cdots, 0).$$

(5) 若 $\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$ 的特征函数，而随机变量 X_i 的特征函数是 $\varphi_{X_i}(v)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立的充要条件是

$$\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \varphi_{X_1}(v)\varphi_{X_2}(v)\cdots\varphi_{X_n}(v).$$

(6) 如果矩 $E[X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n}]$ 存在，则

$$E[X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n}] = \mathrm{j} - \sum_{l=1}^{n} k_l \left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_n)}{\partial v_1^{k_1}\partial v_2^{k_2}\cdots\partial v_n^{k_n}} \right]_{v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0}.$$

6. 母函数

设随机变量 X 的分布列为 $p_k = P\{X = k\}$，$k = 0, 1, \cdots$，称实变数 s 的实函数

$$\psi(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \ (-1 \leqslant s \leqslant 1)$$

为 X 的**母函数**. $\psi(1) = 1$.

任一取非负整数值的随机变量的母函数总是存在的，且在 $[-1, 1]$ 上一致连续.

若 $X \sim B(n, p)$，则 $\psi(s) = (q + ps)^n$；

若 $X \sim \pi(\lambda)$，则 $\psi(s) = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}$.

母函数具有下列性质：

(1) $|\psi(s)| \leqslant \psi(1)=1$.

(2) 线性性. 若 X 的母函数为 $\psi(s)$，则 $Y=aX+b$ 的母函数为 $\psi_Y(s)=s^b\psi_X(s^a)$. a,b 为非负整数.

(3) 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的母函数分别为 $\psi_1(s),\psi_2(s),\cdots,\psi_n(s)$，则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的母函数为 $\psi_x(s)=\prod_{k=1}^{n}\psi_k(s)$.

(4) 若随机变量 X 的 n 阶矩存在，则其母函数 $\psi(s)$ 的 k $(k\leqslant n)$ 阶导数 $\psi^{(k)}(s)$ 存在($|s|\leqslant 1$)，且 X 的 k 阶矩可由母函数在 $S=1$ 时的各阶导数表示，如 $E[X]=\psi'(1)$，$E[X^2]=\psi''(1)+\psi'(1)$.

(5) 由分布列可以唯一确定母函数，由母函数也可以唯一确定分布列.

如 X 的分布列为 $p_k,k=0,1,\cdots$，母函数为 $\psi(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_ks^k(|s|\leqslant 1)$，则分布列 $p_k=\frac{1}{k!}\psi^{(k)}(0)$.

二维随机变量(X_1,X_2)取非负整数值，其分布列为

$p(i,k)=P\{X_1=i,X_2=k\}$, $i,k=0,1,\cdots$，则定义其母函数为

$$\psi(s_1,s_2)=E[s_1^{X_1}\cdot s_2^{X_2}]=\sum_i\sum_k p(i,k)s_1^i s_2^k,$$

其中 $|s_1|\leqslant 1$, $|s_2|\leqslant 1$，也称之为**双变量的母函数**. 双变量的母函数有以下性质：

(1) 对任意 $s_1\in[-1,1]$，$s_2\in[-1,1]$，有

$$|\psi(s_1,s_2)|\leqslant \psi(1,1)=1.$$

(2) 设 $\psi_1(s)$，$\psi_2(s)$ 分别为 X_1 及 X_2 的母函数，则

$$\psi(s,1)=\psi_1(s),\quad \psi(1,s)=\psi_2(s).$$

(3) 若 X_1 和 X_2 相互统计独立，则对于一切 $s_1\in[-1,1]$ 及 $s_2\in[-1,1]$，有

$$\psi[s_1,s_2]=\psi_1(s_1)\psi_2(s_2).$$

(4) 若随机变量 X_1+X_2 的母函数为 $\psi(s,s)$，当 X_1 与 X_2 相互独立时，X_1+X_2 的母函数为

$$\psi(s,s)=\psi_1(s)\psi_2(s).$$

7. 大数定律

几乎处处收敛定义　设 $\{X_n(e)\}$ 是随机变量序列，$X(e)$ 是随机变量，如果

$$P\{e:\lim_{n\to\infty}X_n(e)=X(e)\}=1,$$

则称 $\{X_n(e)\}$ 几乎处处(以概率 1) 收敛于 $X(e)$，记为 $\lim_{n\to\infty}X_n=X(a,e)$ 或

$X_n \to X(a,e)$.

依概率收敛定义 设$\{X_n(e)\}$是随机变量序列，$X(e)$是随机变量，若对任意实数$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{e: |X_n(e)-X(e)|\geqslant \varepsilon\}=0,$$

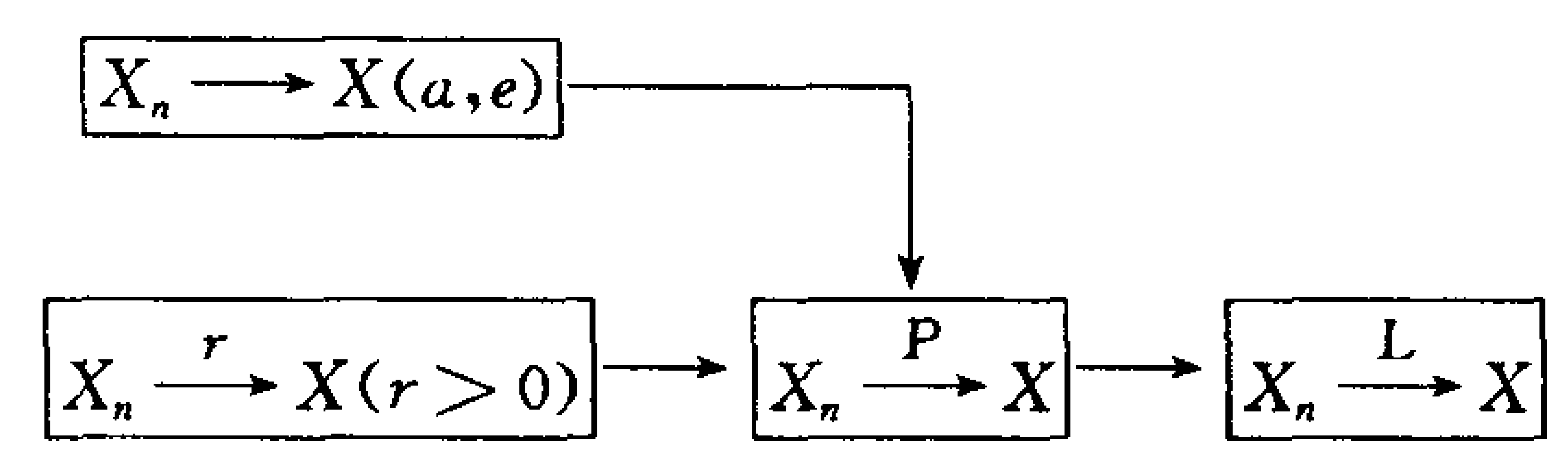
则称$\{X_n(e)\}$依概率收敛于$X(e)$，记为$X_n \xrightarrow{P} X$.

设有一分布函数列$\{F_n(x)\}$，若存在一个非降函数$F(x)$，对于它的每个连续点x，都有$\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$，则称分布函数列$\{F_n(x)\}$弱收敛于$F(x)$，记为$F_n(x)\xrightarrow{W} F(x)$.

依分布收敛定义 设随机变量$X_n(n=1,2,\cdots)$及X的分布函数分别为$F_n(x)(n=1,2,\cdots)$及$F(x)$，若$F_n(x)\xrightarrow{W} F(x)$，则称$\{X_n\}$依分布收敛于$X$，记为$X_n\xrightarrow{L} X$.

r-阶收敛定义 设对随机变量$X_n(n=1,2,\cdots)$及X有$E[|X_n|^r]<\infty$，$E[|X|^r]<\infty$，其中r为正常数，如果$\lim\limits_{n\to\infty} E[|X_n-X|^r]=0$，则称$\{X_n\}$ r-阶收敛于X，记为$X_n\xrightarrow{r} X$.

随机变量序列的四种收敛性有如下关系：



设$\{X_n\}$是$\{\Omega,\mathscr{F},P\}$上的随机变量序列，具有有限的数学期望$E[X_n]$，$n=1,2,\cdots$. 如果随机变量序列$Y_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-E[X_k])$依概率收敛于零，即

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n-0|<\varepsilon\}=1,$$

则称$\{X_n\}$服从**弱大数定律**(简称大数定律).

注意 这里是**先求概率后取极限**.

在同样条件下，如果随机变量序列$Y_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-E[X_k])$几乎处处收敛于零，即

$$P\{\lim_{n\to\infty} Y_n=0\}=1,$$

则称$\{X_n\}$服从**强大数定律**.

注意　这里是**先取极限后求概率**.

常用的大数定律有契比雪夫大数定律、贝努利大数定律以及以下四个大数定律.

(1) **泊松大数定律**　在一个独立试验序列中，事件A在第k次试验中出现的概率为p_k，以μ_k记在前n次试验中事件A出现的次数，则对任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

(2) **马尔可夫大数定律**　设$\{X_n\}$是随机变量序列，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\left[\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right]=0$，则$[X_n]$服从大数定律.

(3) **辛钦大数定律**　设$\{X_n\}$是独立同分布的随机变量序列，且有有限的数学期望$E[X_k]=a$，则对任意的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-a\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

(4) **波雷尔强大数定律**　设μ_n是n次贝努利试验中事件A出现的次数，p是事件A在每次试验中出现的概率，则

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{n}=p\right\}=1.$$

波雷尔强大数定律关于事件A的频率几乎处处收敛于概率p的结论比贝努利大数定律的结论要强.

8. 中心极限定理

正极限定理　设分布函数序列$\{F_n(x)\}$弱收敛于某一分布函数$F(x)$，则相应的特征函数序列$\{\varphi_n(v)\}$收敛于$F(x)$的特征函数$\varphi(v)$，且在v的任一有限区间内收敛是一致的.

逆极限定理　设特征函数序列$\{\varphi_n(v)\}$收敛于某一函数$\varphi(v)$，且$\varphi(v)$在$v=0$连续，则相应的分布函数序列$\{F_n(x)\}$弱收敛于某一分布函数$F(x)$，且$\varphi(v)$是$F(x)$的特征函数.

常用的中心极限定理有：林德伯格－列维中心极限定理、德莫弗－拉普拉斯定理和李雅普诺夫定理.

二、常系数线性差分方程

1. 设$u(t)$为t的未知实函数，若

$$u(t)+\varphi_1 u(t-1)+\cdots+\varphi_p u(t-p)=0,$$

其中 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p$ 为实常数,则称方程为**常系数线性齐次差分方程**.若

$$u(t)+\varphi_1 u(t-1)+\cdots+\varphi_p u(t-p)=h(t),$$

其中 $h(t)$ 为 t 的已知实函数,则称方程为**常系数线性非齐次差分方程**.

2. 延迟算子 B 满足 $\mathrm{B}u(t)=u(t-1)$,并具有以下性质:

(1) 若 $\mathrm{B}^0 u(t)=u(t)$,即 $\mathrm{B}^0=1$,称 B^0 为恒等算子.

(2) 若 c 为常数,则 $\mathrm{B}[cu(t)]=cu(t-1)$.

(3) 对任意两个函数列 $\{u(t)\}$ 和 $\{v(t)\}$,有

$$\mathrm{B}[u(t)\pm v(t)]=\mathrm{B}u(t)\pm \mathrm{B}v(t)=u(t-1)\pm v(t-1).$$

(4) $\mathrm{B}^n u(t)=\mathrm{B}^{n-1}u(t-1)=\cdots=u(t-n)$.

(5) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\mathrm{B}^k\right)(u(t))=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\mathrm{B}^k u(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k u(t-k)$.

常系数线性齐次差分方程与非齐次差分方程的算子多项式形式分别为

$$\left(\sum_{k=0}^{p}\varphi_k\mathrm{B}^k\right)u(t)=0 \quad \text{和} \quad \left(\sum_{k=0}^{p}\varphi_k\mathrm{B}^k\right)u(t)=h(t),$$

其中 $\varphi_0=1$.

3. 方程 $\lambda^p+\varphi_1\lambda^{p-1}+\cdots+\varphi_p=0$ 或 $\sum\limits_{k=0}^{p}\varphi_k\lambda^{p-k}=0$ 称为常系数线性齐次(非齐次)差分方程的特征方程.

常系数线性齐次差分方程的解有如下三种情况:

(1) 若 $\lambda^p+\varphi_1\lambda^{p-1}+\cdots+\varphi_p=0$ 有 p 个相异的实根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$,则齐次方程的解为

$$u(t)=c_1\lambda_1^t+c_2\lambda_2^t+\cdots+c_p\lambda_p^t,$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_p$ 为任意实常数.

(2) 若特征方程的根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 中有重根,设 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{d-1}$,而 $\lambda_d,\lambda_{d+1},\cdots,\lambda_p$ 为相异实根,则齐次方程的解为

$$u(t)=(c_1+c_2t+\cdots+c_{d-1}t^{d-2})\lambda_1^t+c_d\lambda_d^t+\cdots+c_p\lambda_p^t,$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_p$ 为任意实常数.

(3) 若特征方程的根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 中有复根,因为复根必然共轭成对出现,则齐次方程的解 $u(t)$ 中必含正弦项和余弦项.

如特征方程有一对共轭复根 λ_1,λ_2,记为

$$\lambda_1=a+b\mathrm{j}=re^{\mathrm{j}\omega},\quad \lambda_2=a-b\mathrm{j}=re^{-\mathrm{j}\omega},$$

则齐次方程的解中必含

$$
\begin{aligned}
c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t &= c_1 r e^{j\omega} + c_2\, r e^{-j\omega} \\
&= r^t[(c_1 + c_2)\cos\omega t + j(c_1 - c_2)\sin\omega t] \\
&= r^t(D_1\cos\omega t + jD_2\sin\omega t),
\end{aligned}
$$

其中 $$D_1 = c_1 + c_2, D_2 = c_1 - c_2.$$

上面讨论的解 $u(t)$ 中含有 p 个任意常数，称为常系数线性齐次差分方程的通解. 当已知通解应满足的 p 个初始条件时，可求得常系数线性齐次差分方程的一个解.

常系数线性非齐次差分方程的通解由相应齐次差分方程的通解与非齐次差分方程的一个特解构成.

注意 方程 $\varphi(Z) = 1 + \varphi_1 Z + \cdots + \varphi_p Z^p = 0$ 即 $\sum_{k=0}^{p}\varphi_k Z^k = 0, \varphi_0 \equiv 1$ 的根与特征方程 $\lambda^p + \varphi_1\lambda^{p-1} + \cdots + \varphi_p = 0$ 的根互为倒数.

[General Information]
书名=随机过程　　内容、方法与技巧
作者=孙清华　　孙昊
页数=397
SS号=11407991
出版日期=2004年06月第1版